

MOŽNOSTI A LIMITY LLM V GEOMETRICKÉ PŘÍPRAVĚ BUDOUCÍCH UČITELŮ 1. STUPNĚ ZÁKLADNÍCH ŠKOL

Květoslav BÁRTEK, Eva BÁRTKOVÁ, Kamil MRKVAN, David NOCAR
Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta (Česká republika)
kvetoslav.bartek@upol.cz, eva.bartkova@upol.cz, kamil.mrkvan01@upol.cz, david.nocar@upol.cz

Abstrakt

Článek analyzuje možnosti a limity využití modelů GPT-4o, Microsoft Copilot a Gemini 2.0 Flash v geometrické přípravě budoucích učitelů 1. stupně ZŠ. Výzkum se zaměřil na schopnost AI generovat metodické podklady v oblastech trojúhelníkové nerovnosti a inkluzivního pojetí klasifikace objektů (čtverec jako obdélník).

Výsledky potvrzují vysokou logickou integritu modelů při detekci logických nesrovnalostí, což z nich činí efektivní nástroj pro brainstorming a přípravu podkladů. Limitem zůstává didaktická terminologie ovlivněná anglosaskou symbolikou a potenciální riziko izolovaného chápání pojmů u méně pokročilých modelů. Studie zdůrazňuje nutnost rozvoje kompetencí TPACK; role studenta se mění z tvůrce na expertního korektora garantujícího kvalitu výstupů pro českou školní praxi.

Klíčová slova: umělá inteligence (AI), velké jazykové modely (LLM), logická integrita, inkluzivní pojetí pojmů, TPACK, geometrická prekoncepce, konstrukční geometrie

OPPORTUNITIES AND LIMITS OF LLMS IN THE GEOMETRIC PREPARATION OF PRE-SERVICE PRIMARY SCHOOL TEACHERS

Abstract

The article analyzes the potential and limits of GPT-4o, Microsoft Copilot, and Gemini 2.0 Flash in the geometric preparation of pre-service primary teachers. The research focuses on AI's ability to generate materials for teaching triangle inequality and inclusive concept classification. Results confirm the high logical integrity of the models in detecting mathematical contradictions. Limitations include terminology influenced by Anglo-Saxon conventions and the risk of isolated understanding of concepts. The study emphasizes developing TPACK competencies; the student's role shifts from creator to expert proofreader ensuring the quality of AI outputs for Czech educational practice.

Keywords: Artificial Intelligence (AI), Large Language Models (LLM), Logical Integrity, Inclusive Concept Classification, TPACK Framework, Geometrical Misconceptions, Constructive Geometry.

1. Úvod

Nástup velkých jazykových modelů (Large Language Models, LLM) do oblasti vzdělávání představuje jednu z nejvýznamnějších technologických změn v didaktice za poslední desetiletí. V kontextu vysokoškolské přípravy budoucích učitelů 1. stupně základních škol se tyto

nástroje, jako jsou ChatGPT, Copilot, Claude či Gemini, stávají stále častěji využívaným doplňkem samostudia a přípravy na výuku. Specifikem učitelství pro primární stupeň je přitom nutnost transformovat komplexní matematické znalosti do didakticky uchopitelných a věcně správných forem.

Matematická složka přípravy budoucích učitelů je v tomto směru klíčová. Geometrie, jako jedna z hlavních oblastí primární matematiky, klade vysoké nároky nejen na precizní terminologii, ale především na schopnost algoritmického myšlení při konstrukčních úlohách. Zatímco v aritmetických úlohách mohou LLM vykazovat vysokou míru úspěšnosti díky integraci výpočetních modulů, v oblasti elementární geometrie narážejí na své limity. Tyto limity jsou dány především textovou povahou modelů, které postrádají reálnou prostorovou představivost a vizuální ukotvení geometrických objektů v rovině.

Předkládaný článek se zaměřuje na kritickou analýzu věcné správnosti výstupů tří vybraných LLM modelů při generování materiálů pro výuku elementární geometrie. Výzkumným záměrem není pouze zhodnotit aktuální technickou vyspělost těchto nástrojů, ale především upozornit na rizika spojená s jejich nekritickým využíváním v pregraduální přípravě. Pokud budoucí učitelé využívají AI jako kognitivní nástroj k osvětlení vlastních znalostí, stává se věcná správnost (tzv. mathematical correctness) a didaktická integrita generovaného obsahu klíčovými faktory pro kvalitu budoucí výuky a prevenci vzniku matematických miskoncepcí u žáků mladšího školního věku.

Cílem studie je prostřednictvím komparativní obsahové analýzy identifikovat typické chyby a halucinace, kterých se modely v oblasti elementární geometrie dopouštějí a navrhnout doporučení pro efektivní a bezpečné zapojení těchto nástrojů do didaktické přípravy studentů učitelství.

2. Teoretická východiska

2.1. Role technologií v přípravě budoucích učitelů

V procesu pregraduální přípravy učitelů primárního stupně již není otázkou, zda technologie využívat, ale jak je integrovat smysluplně a s ohledem na didaktické cíle. Jedním z nejcitovanějších teoretických modelů, který tento proces popisuje, je rámec TPACK (*Technological Pedagogical Content Knowledge*). Tento model zdůrazňuje, že efektivní výuka s technologiemi nevyžaduje pouze izolované znalosti obsahu (matematiky), pedagogiky a technologií, ale především jejich dynamické propojení (Koehler et al., 2013).

Rámec TPACK zdůrazňuje technologické znalosti (TK), tedy konkrétních nástrojů, softwaru a hardwaru, pedagogické či didaktické znalosti (PK), tedy způsobů řízení výuky, vyučování a vedení žáků, a obsahové znalosti (CK), tedy oboru či vyučovaného učiva. Tyto oblasti se spojují a vytvářejí technologicko-pedagogické znalosti (TPK), které se týkají vztahu mezi technologiemi a pedagogickými postupy; pedagogicko-obsahové znalosti (PCK), zaměřené na pedagogické postupy a vzdělávací cíle; a technologicko-obsahové znalosti (TCK), které se týkají technologií a vzdělávacích cílů (Rosenberg & Koehler, 2015).

V kontextu velkých jazykových modelů (LLM) dochází k zásadnímu posunu v nahlížení na složku technologické znalosti (TK). Tradiční digitální nástroje, jako je dynamický geometrický software GeoGebra, jsou ve své podstatě stabilní a „průhledné“, neboť vyžadují od učitele aktivní ovládání specifických funkcí pro rýsování. Naproti tomu digitální technologie typu LLM jsou, slovy Koehlera a Mishry (2013), „protean, unstable, and opaque“ (všestranné, nestabilní a neprůhledné). LLM modely vystupují v roli autonomního generátoru obsahu, čímž zásadně redefinují průnik technologické a obsahové složky (TCK).

Zásadním východiskem této práce je, že efektivita didaktické transformace je přímo závislá na stabilitě složky obsahové znalosti (CK). Koehler, Mishra a Cain (2013) dále uvádějí, že technologie mají své specifické limity (*constraints*), které mohou ovlivnit reprezentaci

obsahu. Pokud budoucí učitel využije LLM k přípravě konstrukčního postupu, ale model vygeneruje matematicky chybný krok, dochází k destabilizaci celého rámce TPACK. V takovém případě technologie neusnadňuje učení, ale aktivně přispívá k tvorbě odborných chyb a didaktických miskoncepcí.

Pro budoucího učitele 1. stupně je tedy klíčovou kompetencí tzv. kritická technologicko-obsahová znalost. Ta nespočívá pouze v dovednosti vygenerovat pracovní list pomocí promptu, ale v následné validaci věcné správnosti generovaného obsahu. Učitel se zde stává „designérem“ kurikula (Koehler et al., 2013), který musí identifikovat oblasti, kde technologie přestává být matematicky přesná. V praxi to znamená, že učitel:

1. *Rozumí limitům nástroje*: Vnímá LLM jako pravděpodobnostní prediktory textu, které jsou ze své podstaty náchylné k halucinacím (Frieder et al., 2023).
2. *Provádí věcnou validaci*: Automaticky podrobuje každý výstup expertní kontrole dříve, než jej předloží žákům.
3. *Detekuje skryté chyby*: Identifikuje větší i drobná metodická pochybení, například záměnu inkluzivního a exkluzivního vymezení pojmů, která je kritická pro správný vývoj geometrických představ (De Villiers, 1998).

Bez této aktivní validační fáze se umělá inteligence stává zdrojem pedagogického šumu, který může negativně ovlivňovat kognitivní vývoj žáků v oblasti geometrické představivosti.

2.2. Specifika geometrického vzdělávání na primárním stupni

Geometrie v primárním vzdělávání nepředstavuje pouze soubor pouček o geometrických útvarech, ale tvoří základní pilíř pro rozvoj prostorové představivosti, logického usuzování a schopnosti pracovat s abstraktními modely reality. Jak uvádí Polák (2019), didaktika matematiky 21. století se soustředí na didaktickou transformaci obsahu tak, aby odpovídala poznávacím schopnostem žáků, přičemž efektivní využití digitálních technologií se stává jedním z hlavních cílů. Na rozdíl od aritmetiky, která je často procesem lineárním, je geometrie – a zejména její konstrukční část – procesem strukturálním a algoritmickým. Clements a Sarama (2007) zdůrazňují, že rozvoj geometrického myšlení úzce souvisí se schopností kompozice a dekompozice objektů, což dětem umožňuje budovat mentální koncepty vztahů mezi částí a celkem. Klíčovým teoretickým rámcem pro pochopení geneze těchto konceptů je teorie úrovně geometrického myšlení manželů van Hieleových. Van Hiele (1986, cit. dle Žilková, 2013) tvrdí, že rozvoj geometrického myšlení probíhá v následujících pěti úrovních:

- Úroveň 0: Vizualizace – rozpoznávání a pojmenovávání obrazců.
- Úroveň 1: Analýza – popisování vlastností obrazce.
- Úroveň 2: Neformální dedukce – klasifikace a třídění obrazců podle vlastností.
- Úroveň 3: Dedukce – provádění důkazů za použití vět a definic.
- Úroveň 4: Axiomatizace.

Podle Vojkůvkové (2012) procházejí žáci těmito úrovněmi hierarchicky, přičemž každá úroveň disponuje specifickým jazykem a symbolikou. Žáci na 1. stupni ZŠ se typicky nacházejí v prvních dvou fázích:

- **Úroveň 0 (Vizualizace)**: Žáci rozpoznávají tvary jako celky na základě jejich celkového vzhledu (např. „toto je obdélník, protože vypadá jako dveře“). Na této úrovni jsou geometrické objekty vnímány bez hlubší analýzy jejich komponent (Vojkůvková, 2012).
- **Úroveň 1 (Analýza)**: Žáci začínají identifikovat jednotlivé vlastnosti útvarů (např. „obdélník má čtyři pravé úhly“), ale zatím mezi těmito vlastnostmi nechápu logické vazby a hierarchické uspořádání.

Přechod k vyšším úrovním vyžaduje tzv. procesuální správnost a precizní terminologii. Zatímco v aritmetice může být chyba v mezivýpočtu izolovaným jevem, v konstrukční geometrii má každá nepřesnost řetězový efekt. Pokud LLM vygeneruje chybný krok postupu (např. opomene specifikovat průsečíky kružnic), nejde pouze o technickou chybu, ale o didaktické selhání. Takový výstup může žáka v procesu budování mentálních schémat mást a vést k fixaci miskoncepcí. Vzhledem k tomu, že LLM pracují na principu textové predikce, nikoliv na základě prostorové logiky, nemůže se budoucí učitel spoléhat na jejich „intuitivní správnost“. Tato nebezpečná fixace nesprávných představ je hlavním důvodem, proč je geometrie v éře AI kritickým polem pro rozvoj profesních kompetencí učitele.

Významným didaktickým úskalím, na které šetření poukázalo, je napětí mezi inkluzivním a exkluzivním vymezením pojmů. De Villiers (1998) upozorňuje, že žáci si často budují tzv. „konceptuální obrazy“ (*concept images*), které mohou být v přímém rozporu s formálními definicemi. Častým problémem v primárním vzdělávání je, že žáci i po seznámení se s definicí (např. rovnoběžníku) odmítají do této kategorie zařadit speciální případy jako čtverec či obdélník. Jejich vnitřní představa je příliš vázaná na prototypické zobrazení, což signalizuje setrvání na nižších úrovních geometrického myšlení (Vojkůvková, 2012).

Zatímco moderní didaktika preferuje inkluzivní přístup (např. čtverec je speciálním případem obdélníku, jehož všechny strany mají stejnou délku), v praxi se učitelé potýkají s rezistencí žáků preferujících exkluzivní chápání (čtverec v tomto pojetí není obdélníkem). Schopnost inkluzivní klasifikace je přitom znakem dosažení úrovně abstrakce (2. úroveň dle van Hieleho), kde žáci začínají chápat logické vazby mezi vlastnostmi útvarů (De Villiers, 1998). Pokud LLM modely v generovaných metodických materiálech tyto dva přístupy nekriticky kombinují, mohou u budoucích učitelů prohlubovat terminologickou nejasnost. To potvrzuje naléhavost požadavku, aby pregraduální příprava kladla důraz na hlubokou oborově-didaktickou erudici jako jedinou funkční pojistku proti technologicky generovaným chybám (Polák, 2019).

2.3. Limity LLM v matematickém uvažování

Aby bylo možné kriticky zhodnotit kvalitu výstupů generovaných umělou inteligencí, je nezbytné porozumět klíčovému rozdílu mezi lidským matematickým uvažováním a principem fungování velkých jazykových modelů (LLM).

Navzdory schopnosti generovat jazykově kultivované a přesvědčivé texty, LLM v jádru nepředstavují systémy založené na pravidlech symbolické logiky. Jak uvádějí Huang et al. (2023), jedná se o pravděpodobnostní prediktory, které generují obsah na základě statistických korelací v trénovacích datech, nikoliv na základě vnitřního porozumění faktům nebo logickým zákonitostem. Zatímco lidský řešitel při řešení geometrické úlohy vychází z axiomů a logických odvození, LLM modely konstruují odpověď skládáním tokenů (částí slov). Tento proces je náchylný k selhání zejména v úlohách vyžadujících tzv. vícezkrokové uvažování (tzv. logická integrita).

Frieder et al. (2023) ve své analýze matematických schopností modelů ChatGPT zdůrazňují, že geometrický konstrukční postup je typickým příkladem řetězce vzájemně závislých kroků. V takovém algoritmu má každá instrukce striktní návaznost na kroky předcházející; pokud model chybuje v definici výchozího bodu nebo vlastnosti úsečky, celá následná struktura postupu se logicky hroutí. Tato dekonstrukce logické cesty se často děje pod povrchem gramaticky bezchybného a terminologicky bohatého textu. Tento nesoulad mezi formální kvalitou jazyka a vnitřní nelogičností obsahu se označuje jako „halucinace“. Huang et al. (2023) definují halucinace jako generování obsahu, který je věcně nesprávný nebo v rozporu se zadaným kontextem.

V geometrii nejde o náhodné generování slov, ale o neschopnost modelu pracovat s prostorovými vztahy, které popisuje. Model postrádá „vnitřní geometrický svět“; může tedy s vysokou mírou jistoty tvrdit, že bod je průsečíkem dvou přímek, které jsou však podle jeho vlastního zadání rovnoběžné. Tento fenomén potvrzuje tezi Koehlera a Mishry (2013) o „neprůhlednosti“ (opaqueness) moderních technologií, kdy uživatel snadno podlehně iluzi kompetence stroje. Pro budoucího učitele je pochopení tohoto limitu zásadní pro rozvoj jeho profesních kompetencí. Musí si být vědom, že LLM nevykazuje „pochopení“ matematické pravdy, ale pouze vysokou míru pravděpodobnosti textové shody. Znalost tohoto technologického omezení je základním stavebním kamenem kritické technologicko-obsahové znalosti (TCK). Umožňuje studentovi přistupovat k nástroji nikoliv jako k neomylné autoritě, ale jako k „unstable“ partnerovi (Koehler et al., 2013), jehož výstupy vyžadují permanentní expertní supervizi.

V kontextu těchto limitů tak paradoxně vyvstává naléhavější potřeba hluboké oborově-didaktické přípravy. Právě vysoká úroveň matematické erudice a schopnost provádět věcnou validaci (Polák, 2019) se stávají nezbytným předpokladem pro bezpečné a smysluplné využívání umělé inteligence v primárním vzdělávání.

2.4. Halucinace a jejich typologie v kontextu matematického uvažování

Huang et al. (2023) definují halucinace v prostředí LLM jako generování fakticky nesprávných, nelogických nebo s kontextem nekonsistentních tvrzení, která jsou však modelem prezentována s vysokou mírou lingvistické sebejistoty.

V oblasti matematického uvažování se tyto chyby projevují kriticky zejména v procesech vícezkrokového odvozování (logická integrita). Jak uvádějí Frieder et al. (2023), u geometrických úloh, kde je výsledek podmíněn precizní sekvencí logických operací, dochází k tzv. kaskádovému selhání – každý chybný krok v algoritmu destabilizuje celou následnou strukturu. Na základě analýzy geometrického obsahu lze definovat tři specifické typy halucinací:

1. Halucinace logické (axiomální)

Tento typ představuje porušení základních geometrických axiomů a zákonitostí. Model například navrhne konstrukční postup pro trojúhelník, jehož délky stran neodpovídají trojúhelníkové nerovnosti, nebo operuje s objekty v euklidovském prostoru, které vykazují vnitřně rozporné vlastnosti. Frieder et al. (2023) upozorňují, že modely často „přeskakují“ logické vazby a nahrazují je statisticky pravděpodobnými, leč matematicky nemožnými tvrzeními.

2. Halucinace terminologické (lingvistické)

Dochází k nesprávnému užití odborných pojmů, což je v geometrii 1. stupně ZŠ zvláště rizikové. Jde například o záměnu pojmů „kružnice“ a „kruh“ nebo „úsečka“ a „přímka“. Z pohledu van Hieleho teorie (Vojkůvková, 2012) tyto halucinace narušují integritu jazyka dané úrovně myšlení. Pokud model užívá terminologii úrovně analýzy (1), ale kombinuje ji s chybnými definicemi, vytváří u budoucího učitele falešný dojem odborné správnosti, který může vést k fixaci didaktických chyb (De Villiers, 1998).

3. Halucinace reprezentační (prostorové)

Tyto chyby se týkají chybných popisů prostorových vztahů a vzájemných poloh objektů. Typickým příkladem je tvrzení o existenci průsečíku u přímek, které model v tomtéž textu definoval jako rovnoběžné. Jelikož LLM postrádají schopnost vizuální reprezentace a prostorové představivosti, kterou Clements a Sarama (2007) považují za základ geometrického poznání, jejich „popis prostoru“ je pouze syntaktickou konstrukcí bez sémantického ukotvení v realitě. Tato typologie rozšiřuje obecnou taxonomii Huang et al.

(2023) o nezbytnou didaktickou dimenzi. Pro pregraduální přípravu učitelů z toho vyplývá, že identifikace halucinací není pouze technickou dovedností, ale vyžaduje vysokou úroveň oborové kompetence. Bez schopnosti rozeznat logickou nekonzistenci od terminologické nepřesnosti nemůže učitel efektivně plnit roli tvůrce a validátora výuky a výukových materiálů v digitálním věku (Koehler et al., 2013).

3. Metodologie a design šetření

Cílem praktické části studie je provést komparativní analýzu schopností vybraných systémů umělé inteligence generovat metodicky správné a věcně bezchybné podklady pro výuku konstrukční geometrie na primárním stupni. Výzkumný design reflektuje rámec TPACK (Koehler et al., 2013), přičemž se zaměřuje na kritické posouzení průniku technologické a obsahové složky (TCK) v situaci, kdy technologie (LLM) přebírá roli autonomního tvůrce didaktického obsahu.

3.1. Výzkumné otázky

Vzhledem k teoretickým východiskům o limitech matematického uvažování LLM (Frieder et al., 2023) a didaktickým specifikům geometrického vzdělávání (Vojkůvková, 2012) jsme si stanovili následující výzkumné otázky:

- **VO1:** Jaká je míra věcné (matematické) správnosti konstrukčních postupů generovaných vybranými modely v kontextu stability složky Content Knowledge?
- **VO2:** Jaké typické formy halucinací (logické, terminologické, reprezentační) se v generovaných textech vyskytují v souladu s taxonomií Huang et al. (2023)?
- **VO3:** Do jaké míry reflektují generované výstupy inkluzivní pojetí geometrických pojmů (např. hierarchický vztah čtverce a obdélníku) odpovídající moderní didaktice (De Villiers, 1998)?

3.2. Charakteristika zkoumaných LLM nástrojů

Pro účely komparativní analýzy byly vybrány tři reprezentativní systémy, které aktuálně dominují trhu s generativní umělou inteligencí a vykazují nejvyšší míru integrace do akademického a školního prostředí. Výběr reflektuje technologickou variabilitu, kterou Koehler a Mishra (2013) označují za „unstable and opaque“, a zahrnuje různé přístupy k integraci TK:

1. OpenAI ChatGPT (model GPT-4o)

Tento model byl zvolen jako globální referenční standard multimodálního systému s nejvyšší deklarovanou úrovní logického uvažování. Pro budoucí učitele představuje primární nástroj pro generování komplexních struktur, u něhož se předpokládá nejpokročilejší schopnost víceetapového odvozování (logická integrita), kritického pro geometrické konstrukce (Frieder et al., 2023).

2. Microsoft Copilot (režim „Precise“)

Nástroj byl zařazen jako reprezentant institucionální sféry, neboť je plošně integrován do ekosystému Microsoft 365 na většině českých univerzit a škol. Z pohledu rámce TPACK představuje technologii, se kterou budoucí učitelé pracují v rámci oficiálních licencí. Nastavení na režim „vysoké přesnosti“ bylo zvoleno záměrně, aby bylo možné sledovat stabilitu obsahové složky (CK) při potlačení kreativních složek modelu.

3. Google Gemini (model 2.0 Flash)

Reprezentant nejnovější generace agilních modelů optimalizovaných pro rychlou odezvu a efektivitu v rámci Google Workspace. Jeho zařazení umožňuje sledovat, jak si v náročných

úlohách konstrukční geometrie vedou modely s nižší výpočetní náročností, které jsou však masivně rozšířeny mezi žáky i učiteli na základních školách v ČR. Tato trojice nástrojů poskytuje komplexní pohled na aktuální technologické možnosti a limity. Analýza jejich výstupů umožní identifikovat, zda a do jaké míry vyžadují tyto „protean“ technologie (Koehler et al., 2013) od učitele specifické validační kompetence pro zachování didaktické kvality výuky geometrie.

3.3. Formulace testovacích úloh

Abychom zaručili objektivitu výzkumu a eliminovali vliv kontextového učení, využili jsme metodu tzv. zero-shot prompting. Tyto prompty byly navrženy bez doplňujících nápověd, aby simulovaly běžný scénář, kdy student učitelství využívá technologii k rychlé přípravě na výuku.

Prompt P1: Test základního algoritmu a existenčních podmínek

- **Zadání:** „Ahoj, jsem student učitelství a připravuji si podklady pro výuku geometrie na 1. stupni ZŠ. Napiš mi prosím podrobný postup konstrukce trojúhelníku ABC , který má strany o délkách: $a = 6$ cm, $b = 3$ cm, $c = 2$ cm. Postup piš tak, aby byl srozumitelný pro žáka 5. třídy.“
- **Sledovaný didaktický problém:** Úloha testuje schopnost modelu identifikovat porušení trojúhelníkové nerovnosti ($3 + 2 < 6$). Správná odpověď, odpovídající hluboké obsahové znalosti (CK), musí obsahovat upozornění, že trojúhelník nelze sestavit. Generování postupu bez této reflexe je klasifikováno jako logická halucinace (Huang et al., 2023) a kritické didaktické selhání.

Prompt P2: Test pojmové hierarchie a inkluzivního myšlení

- **Zadání:** „Ahoj, jsem student učitelství a připravuji si podklady pro svou praxi pro výuku geometrie na 1. stupni ZŠ. Napiš mi prosím podklad pro žáky 5. třídy na téma obvod obdélníku. Úkol: Najdi všechny možné obdélníky, které mají obvod 16 cm a délky jejich stran jsou celá čísla. Požadavky: 1. Vysvětli žákům postup, jak jsi řešení hledal. 2. Uveď, zda jsi vyčerpal všechny možnosti.“
- **Sledovaný didaktický problém:** Úloha primárně cílí na analýzu inkluzivního vs. exkluzivního vymezení pojmů. Jak uvádí De Villiers (1998), moderní didaktika vyžaduje, aby byl čtverec vnímán jako speciální případ obdélníku. Sledujeme, zda AI do výčtu variant ($1 + 7$, $2 + 6$, $3 + 5$, $4 + 4$) zahrne i čtverec. Schopnost modelu toto ošetřit indikuje připravenost technologie podporovat rozvoj vyšších úrovní geometrického myšlení (2. úroveň – abstrakce dle van Hieleho). Sekundárně úloha testuje logickou integritu při hledání vyčerpávajícího počtu řešení.

3.4. Metoda analýzy a testovací kritéria

Všechny vygenerované výstupy byly podrobeny expertní analýze, která reflektuje průnik oborové didaktiky a technických limitů LLM. Hodnocení probíhalo ve čtyřech klíčových dimenzích na škále 1 (zcela správně/vhodně) až 3 (zcela chybně/nevhodně). Kritéria byla navržena tak, aby identifikovala specifické typy halucinací definované Huangem et al. (2023) a úroveň didaktické transformace:

1. Věcná (obsahová) správnost (CK) – posuzuje stabilitu obsahové znalosti a přítomnost logických halucinací.
Je podle návodu možné útvar narysovat? Jsou respektovány geometrické axiomy a existenční podmínky?
2. Terminologická a jazyková přesnost – hodnotí přítomnost terminologických halucinací (Huang et al., 2023).

Odpovídá použité názvosloví českým zvyklostem (např. rozdíl mezi kružnicí a kruhem) a jazyku odpovídající úrovně dle van Hieleho (Vojkůvková, 2012)?

3. Didaktická srozumitelnost (PCK) – sleduje kvalitu didaktické transformace obsahu. Je text srozumitelný pro cílovou skupinu (žák 5. třídy)? Neobsahuje metodicky nevhodné postupy, které by u žáků budovaly miskoncepce?
4. Logická integrita (Logická integrita) – hodnotí schopnost modelu udržet logickou linku v celém řetězci kroků (Frieder et al., 2023). Navazují instrukce na sebe, nebo model v průběhu generování „zapomněl“ výchozí parametry zadání?

4. Testování modelů

V následujících částech textu předkládáme relevantní doslovné přepisy generovaných odpovědí pro každý ze zkoumaných modelů. Pro zachování autenticity a možnosti expertní validace jsou výstupy ponechány v původním znění, včetně případných obsahových a terminologických nepřesností.

Je však nutné zdůraznit, že v průběhu testování docházelo u všech modelů k opakovaným a kritickým halucinacím v momentech, kdy se systémy pokoušely o vizuální reprezentaci geometrických konceptů (např. pomocí ASCII artu, schémat nebo generovaných obrázků). Tyto vizualizace vykazovaly totální absenci prostorové logiky a absolutně neodpovídaly geometrické skutečnosti. Tento jev je přímým důsledkem technologické podstaty LLM, které, jak bylo uvedeno v teoretické části, fungují jako pravděpodobnostní prediktory textových tokenů, nikoliv jako modely disponující sémantickým pochopením prostoru nebo grafickou přesností.

Vzhledem k tomu, že tyto grafické výstupy vykazovaly nulovou didaktickou hodnotu a jejich interpretace by byla pro žáka zavádějící, byly z popisu výsledků a následné analýzy u všech modelů vyloučeny. Šetření se tedy soustředí výhradně na textové konstrukční postupy a metodické instrukce, které představují klíčový prvek didaktické transformace obsahu.

4.1. Prompt P1

„Ahoj, jsem student učitelství a připravuji si podklady pro výuku geometrie na 1. stupni ZŠ. Napiš mi prosím podrobný postup konstrukce trojúhelníku ABC, který má strany o délkách: $a = 6\text{ cm}$, $b = 3\text{ cm}$, $c = 2\text{ cm}$. Postup piš tak, aby byl srozumitelný pro žáka 5. třídy.“

4.1.1. ChatGPT-4o (doslovný přepis)

Ahoj! Rád ti pomohu s konstrukcí trojúhelníku. Nicméně, podle trojúhelníkové nerovnosti nemůže existovat trojúhelník s délkami stran $a = 6\text{ cm}$, $b = 3\text{ cm}$ a $c = 2\text{ cm}$, protože součet délek dvou kratších stran ($b + c = 5\text{ cm}$) musí být větší než délka nejdelší strany ($a = 6\text{ cm}$).

Pokud chceš, mohu ti pomoci s konstrukcí trojúhelníku s jinými délkami stran, které splňují trojúhelníkovou nerovnost. Dej mi vědět, jaké délky bys chtěl použít!

4.1.2. Copilot (Precise) (doslovný přepis)

Nejdřív rychlá kontrola: Může takový trojúhelník existovat?

Pravidlo (trojúhelníková nerovnost):

Součet dvou kratších stran musí být větší než třetí (nejdelší) strana.

- Máme: $a = 6\text{ cm}$, $b = 3\text{ cm}$, $c = 2\text{ cm}$
- Součet kratších: $3\text{ cm} + 2\text{ cm} = 5\text{ cm}$
- Nejdelší: 6 cm

Protože 5 cm není větší než 6 cm , takový trojúhelník neexistuje.

Závěr: Trojúhelník s těmito délkami nelze sestrojit.

„Pokus o konstrukci“ – krok za krokem (aby žáci viděli, proč to nejde)

Pomůcky: pravítko, kružítko, tužka.

1. Narýsuj úsečku BC dlouhou 6 cm (to je strana a).
2. Do kružítko vezmi 2 cm a opiš kružnici se středem v bodě B .
(Hledáme bod A tak, aby $AB = 2$ cm.)
3. Do kružítko vezmi 3 cm a opiš kružnici se středem v bodě C .
(Současně má platit $AC = 3$ cm.)
4. Podívej se, zda se kružnice protínají.
 - Vzdálenost středů B a C je 6 cm.
 - Součet poloměrů kružnic je $2 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$.
 - Když je součet poloměrů menší než vzdálenost středů, kružnice se neprotínají.
5. Kružnice se neprotínají $\rightarrow$ neexistuje bod A , který by splnil obě podmínky ($AB = 2$ cm a $AC = 3$ cm).

Závěr: Trojúhelník s těmito délkami nelze narýsovat.

Žákovská pomůcka / analogie:

Představ si tři špejle: 6 cm, 3 cm a 2 cm. Z těchto tří špejlí „trojúhelník“ nezavřeš, protože dvě kratší dohromady nedosáhnou na tu nejdelší.

Jak to žákům vysvětlit jednoduše

- „Dvě kratší strany dohromady musí být delší než ta dlouhá. Když nejsou, tvar se nezavře.“
- „Kružítko se musí potkat. Když se dvě kružnice nepotkají, chybí nám třetí vrchol.“

Tip: Změň čísla a konstrukce půjde

Např. $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, $c = 2$ cm (tady $3 + 2 = 5 > 4$, takže OK).

Postup (SSS – všechny tři strany známe):

1. Narýsuj úsečku AB dlouhou $c = 2$ cm.
2. Se středem v A opiš kružnici s poloměrem $b = 3$ cm.
3. Se středem v B opiš kružnici s poloměrem $a = 4$ cm.
4. Průsečík kružnic označ C .
(Pokud jsou dva průsečíky, vyber jeden — vzniknou dvě „zrcadlové“ možnosti.)
5. Spoj AC a BC . Máš trojúhelník ABC .
6. Kontrola: Změř pravítkem AB (2 cm), AC (3 cm), BC (4 cm).

Didaktické tipy

- Nechte děti nejdříve zkusit odhad: „Bude tohle možné?“ a použijte pravidlo sečtení kratších stran.
- Pak udělejte „pokus o konstrukci“, aby viděly, že se kružnice nepotkají.
- Krátká praktická aktivita: tři provázky/špejle (6, 3, 2 cm) a pokusit se je spojit do trojúhelníku – nejde to.

Pokud chceš, připravím ti k tomu pracovní list nebo jednoduchý obrázek k vytištění (PDF), kde budou:

- pravidlo trojúhelníkové nerovnosti,
- „pokus o konstrukci“ s obrázkem,
- a jeden „správný“ příklad k narýsování.

Chceš raději jednu stránku A4 nebo krátkou prezentaci (PowerPoint)?

4.1.3. Google Gemini 2.0 Flash (doslovný přepis)

Ahoj! Bohužel, takový trojúhelník nelze sestrojit. Součet dvou kratších stran ($b + c$) musí být větší než délka nejdelší strany (a). V tomto případě $3 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$, což je méně než 6 cm . Trojúhelník se “nespojí”.

Pokud bys chtěl/a postup pro trojúhelník, který sestrojit jde, dej mi vědět s novými délkami stran!

4.1.4. Diskuse výsledků šetření P1

První testovací úloha (P1) byla zaměřena na schopnost modelů identifikovat matematickou nemožnost konstrukce trojúhelníku v důsledku porušení trojúhelníkové nerovnosti ($b + c < a$). Z hlediska rámce TPACK tato úloha testovala především stabilitu složky Content Knowledge (CK) a schopnost její didaktické transformace (PCK).

Výsledky šetření ukazují, že v této základní úrovni geometrického uvažování všechny tři testované modely uspěly v detekci chyby. Nedošlo k žádné logické halucinaci, při které by model generoval postup pro neexistující objekt, což indikuje výrazný posun oproti starším verzím LLM (srov. Frieder et al., 2023).

- **ChatGPT-4o:** Prokázal vysokou úroveň CK. Chybu identifikoval okamžitě a jasně ji zdůvodnil. Z hlediska PCK je však výstup strohý – model pouze konstatuje nemožnost a nabízí pomoc s jiným zadáním. Pro studenta učitelství představuje tento výstup bezpečnou „pojistku“, ale nenabízí žádnou přidanou didaktickou hodnotu pro výuku.
- **Copilot (Precise):** Tento model vykázal nejvyšší úroveň didaktické kompetence. Nejenže chybu identifikoval, ale v souladu s moderními trendy v didaktice (Polák, 2019) ji využil jako „teachable moment“. Nabídl „pokus o konstrukci“, který žákům vizualizuje, proč kružnice nemohou vytvořit průsečík (třetí vrchol). Výstup obsahuje analogii se špejlemi, která odpovídá vizualizační úrovni (0) dle van Hieleho, a následně nabízí i správný příklad pro srovnání. Z hlediska metodiky jde o komplexní podklad pro vyučovací hodinu.
- **Gemini 2.0 Flash:** Model reagoval věcně správně a velmi efektivně. Jeho vysvětlení, že se trojúhelník „nespojí“, je srozumitelné pro cílovou skupinu (5. třída). Stejně jako ChatGPT se však omezil na korekci zadání bez hlubšího didaktického rozpracování.

V tabulce níže uvádíme průměrné skóre v jednotlivých dimenzích (1 = nejlepší, 3 = nejhorší):

Tabulka 1. průměrné skóre LLM ve sledovaných dimenzích promptu P1

Kritérium	ChatGPT-4o	Copilot (Precise)	Gemini 2.0 Flash
Věcná správnost (CK)	1	1	1
Terminologická přesnost*	1	3	2
Didaktická srozumitelnost (PCK)	2	1	2
Logická integrita	1	1	1

*Hodnocení terminologické přesnosti jednotlivých LLM je vzhledem k rozdílné délce vygenerovaných odpovědí velmi obtížné objektivně hodnotit. Odpověď modelu Copilot byla nesrovnatelně komplexnější, čímž vznikl mnohem větší prostor k matematicky nekorektnímu výstupu. Toto kritérium tak nebylo možné brát zcela v potaz.

Z analýzy zbývajících kritérií se ukazuje, že pro budoucího učitele je v této fázi nejvíce přínosný model Copilot, který nejlépe simuluje roli zkušeného metodika. Modely ChatGPT a Gemini fungují spíše jako expertní korektoři, kteří sice zabrání věcné chybě (stabilní CK), ale

didaktickou transformaci (PCK) ponechávají plně na uživateli. Tento náález potvrzuje, že i při bezchybném výstupu AI zůstává role učitele jako designéra výuky (Koehler et al., 2013) nezastupitelná.

4.2. Prompt P2

Ahoj, jsem student učitelství a připravuji si podklady pro svou praxi pro výuku geometrie na 1. stupni ZŠ. Napiš mi prosím podklad pro žáky 5. třídy na téma obvod obdélníku. Úkol: Najdi všechny možné obdélníky, které mají obvod 16 cm a délky jejich stran jsou celá čísla. Požadavky: 1. Vysvětli žákům postup, jak jsi řešení hledal. 2. Uveď, zda jsi vyčerpal všechny možnosti.

4.2.1. ChatGPT-4o

Podklad pro žáky: Obvod obdélníku

Úkol: Najdi všechny možné obdélníky, které mají obvod 16 cm a délky jejich stran jsou celá čísla.

1. Vysvětlení postupu:

Obvod obdélníku se počítá podle vzorce:

$$[O = 2 \times (a + b)]$$

Kde (O) je obvod, (a) je délka jedné strany a (b) je délka druhé strany.

V našem případě je obvod ($O = 16$) cm. Dosadíme do vzorce:

$$[16 = 2 \times (a + b)]$$

Zjednodušíme rovnici:

$$[8 = a + b]$$

Musíme tedy najít všechny dvojice celých čísel (a) a (b), které splňují tuto rovnici.

2. Vizuální znázornění řešení:

Možné dvojice ((a, b)) jsou:

$$(a = 1), (b = 7)$$

$$(a = 2), (b = 6)$$

$$(a = 3), (b = 5)$$

$$(a = 4), (b = 4)$$

Ano, vyčerпали jsme všechny možnosti. Pro každou dvojici (a) a (b) platí ($a + b = 8$), kde (a) a (b) jsou celá čísla. Všechny možné kombinace jsme našli a znázornili.

4.2.2. Copilot (Precise)

Zde je podklad pro žáky 5. třídy k tématu obvod obdélníku na zadaný úkol. Je psaný přímo pro děti – můžeš ho vytisknout jako pracovní list nebo promítnout.

Pracovní list: Obvod obdélníku – Úkol s obvodem 16 cm

Co je obvod obdélníku?

Obvod obdélníku je délka „okraje“ (všech čtyř stran).

Vzorec: $O = 2 \times (a + b)$, kde a a b jsou délky stran.

Zadání

Najdi všechny možné obdélníky, které mají obvod 16 cm a délky jejich stran jsou celá čísla (v centimetrech).

Jak na to – postup krok za krokem (vysvětlení pro žáky)

Použij vzorec pro obvod:

$$O = 2 \times (a + b). \text{ Máme } O = 16, \text{ tedy}$$

$$2 \times (a + b) = 16 \Rightarrow a + b = 8.$$

Hledáme dvě celá kladná čísla, která sečtená dají 8.

Začneme nejmenší možnou celou délkou $a = 1$ a k ní dopočítáme $b = 8 - a$.

Postupuj systematicky:

Zvyšuj a o 1 (1, 2, 3, 4, ...) a vždy spočítej $b = 8 - a$.

Zastav se, jakmile by a „přeskočilo“ b (protože obdélník s délkami a , b je stejný jako s délkami b , a).

Zkontroluj každou dvojici:

Pro jistotu u každé dvojice ověř: $2 \times (a + b) = 16$.

Řešení (všechny dvojice celých čísel)

Celá kladná čísla a , b s $a + b = 8$:

$$a = 1, b = 7 \rightarrow \text{obvod } 2 \times (1 + 7) = 16$$

$$a = 2, b = 6 \rightarrow \text{obvod } 2 \times (2 + 6) = 16$$

$$a = 3, b = 5 \rightarrow \text{obvod } 2 \times (3 + 5) = 16$$

$$a = 4, b = 4 \rightarrow \text{obvod } 2 \times (4 + 4) = 16$$

Poznámka: Dvojice (5, 3), (6, 2), (7, 1) jsou stejné tvary „jen otočené“. Abychom neměli stejné obdélníky dvakrát, stačí uvést ty s $a \leq b$.

Jsou to opravdu všechny možnosti?

Ano. Vysvětlení:

Víme, že $a + b = 8$ a a , b mají být celá kladná čísla (strana nemůže být 0).

Když systematicky projdeme $a = 1, 2, 3, 4$, dostaneme $b = 7, 6, 5, 4$.

Pro $a = 5, 6, 7$ bychom dostali jen stejné obdélníky, ale otočené ($b = 3, 2, 1$).

Proto jsou všechny různé tvary (bez ohledu na otočení) právě: $1 \times 7, 2 \times 6, 3 \times 5, 4 \times 4$.

Kontrolní otázky (pro sebe hodnocení)

Proč jsme rovnost $2 \times (a + b) = 16$ přepsali na $a + b = 8$?

Proč nebereme dvojici (0, 8)?

Který z nalezených obdélníků je čtverec? Proč?

Dokázal/a bys najít všechny obdélníky s obvodem 20 cm se stejným postupem?

Tip (volitelné): Rozšíření pro zvědavé

Zkus se zamyslet: mají nalezené obdélníky stejný obsah? (Obsah je $S = a \times b$.) Který má největší obsah a proč?

4.2.3. Google Gemini 2.0 Flash

Ahoj! Tady máš podklad pro žáky 5. třídy na téma obvod obdélníku:

Obvod obdélníku – hledači obdélníků

Cíl: Naučit se vypočítat obvod obdélníku a hledat různé obdélníky se stejným obvodem.

Pomůcky: Pravítko, tužka, papír, (volitelně) čtverečkovaný papír.

Úvod:

Zopakujte si, co je to obdélník (čtyřúhelník se 4 pravými úhly, protilehlé strany jsou stejně dlouhé).

Zopakujte si, co je obvod (součet délek všech stran).

Připomeňte vzorec pro obvod obdélníku: $O = 2 \times (a + b)$, kde ' a ' je délka jedné strany a ' b ' je délka druhé strany.

Úkol:

Najděte všechny možné obdélníky, které mají obvod přesně 16 cm a délky jejich stran jsou celá čísla.

Postup:

Zjednodušení vzorce: Víme, že obvod je 16 cm, takže můžeme vzorec upravit:
 $16 = 2 \cdot (a + b)$. Když obě strany rovnice vydělíme 2, dostaneme: $8 = a + b$. To znamená, že součet délek dvou sousedních stran musí být 8 cm.

Hledání dvojic čísel: Nyní hledáme všechny dvojice celých čísel, které dávají součet 8. Začneme systematicky:

Pokud je $a = 1$ cm, pak $b = 7$ cm (protože $1 + 7 = 8$)

Pokud je $a = 2$ cm, pak $b = 6$ cm (protože $2 + 6 = 8$)

Pokud je $a = 3$ cm, pak $b = 5$ cm (protože $3 + 5 = 8$)

Pokud je $a = 4$ cm, pak $b = 4$ cm (protože $4 + 4 = 8$)

Pokud bychom pokračovali dál ($a = 5$ cm), dostali bychom $b = 3$ cm, což už je obdélník, který jsme našli (pouze prohozené strany).

Závěr: Našli jsme 4 různé obdélníky s obvodem 16 cm a celočíselnými délkami stran:

1 cm x 7 cm

2 cm x 6 cm

3 cm x 5 cm

4 cm x 4 cm (což je čtverec!)

Odpověď: Našli jsme všechny možnosti. Existují 4 různé obdélníky, které splňují zadané podmínky.

Doplňkové aktivity:

Nakreslete si tyto obdélníky na čtverečkovaný papír.

Zkuste najít obdélníky s jiným obvodem.

Co kdyby délky stran mohly být i desetinná čísla? Kolik by bylo možností?

Hodně štěstí s praxí!

4.2.4. Diskuse výsledků šetření P2

Druhá testovací úloha (P2) byla navržena k prověření pokročilejších aspektů „Pedagogical Content Knowledge“ (PCK). Cílem bylo zjistit, zda modely pracují s inkluzivním pojetím geometrických pojmů (zda zahrnou čtverec mezi obdélníky) a zda dokážou systematicky a úplně vyčerpat stavový prostor řešení u úlohy s obvodem 16 cm.

Všechny tři zkoumané modely v této úloze prokázaly vysokou úroveň logické integrity. Žádný z modelů se nedopustil logické halucinace typu „zapomenutí zadání“ nebo výpočtové chyby při odvození vztahu $a + b = 8$.

- **ChatGPT-4o:** Model zvolil ryze matematický, analytický přístup. Správně odvodil zjednodušený součet stran a našel všechny čtyři celočíselné kombinace. Z hlediska didaktiky je však jeho výstup neutrální; ačkoliv čtverec (4, 4) do seznamu zahrnul (inkluzivní přístup), nijak na tento fakt didakticky neupozornil. Pro studenta učitelství tak výstup představuje korektní klíč řešení, ale postrádá metodický komentář k pojmové hierarchii.
- **Copilot (Precise):** Tento model opět potvrdil svou orientaci na školní praxi. Výstup transformoval do podoby komplexního pracovního listu. Velmi cenným prvkem z hlediska didaktiky je zařazení kontrolní otázky: „Který z nalezených obdélníků je čtverec? Proč?“. Tímto krokem model aktivně podporuje přechod žáka na 2. úroveň dle van Hieleho (abstrakce), kde dochází k pochopení vztahů mezi vlastnostmi obrazců (Vojkůvková, 2012). Systém také metodicky správně vysvětlil, proč stačí uvést pouze čtyři dvojice a vyhnout se duplicitám vzniklým v důsledku komutativity.
- **Google Gemini 2.0 Flash:** Model Gemini se v této úloze projevil jako didakticky nejpřesnější. Nejenže našel všechna řešení, ale u varianty obdélník o stranách 4 cm a 4 cm explicitně a v kontextu výpočtu uvedl poznámku „(což je čtverec!)“. Tím přímo

naplňuje požadavek na inkluzivní klasifikaci (De Villiers, 1998). Gemini také jako jediný model doplnil „Doplňkové aktivity“ (práce s čtverečkovaným papírem, úvaha o desetinných číslech), což svědčí o vysoké úrovni didaktické flexibility.

Tabulka 2. průměrné skóre LLM ve sledovaných dimenzích promptu P2

Kritérium	ChatGPT-4o	Copilot (Precise)	Gemini 2.0 Flash
Věcná správnost (CK)	2	2	2
Inkluzivní pojetí (VO3)	2 (implicitní)	1 (explicitní v otázce)	1 (explicitní v textu)
Didaktická srozumitelnost (PCK)	2	1	1
Úplnost řešení	1 (4/4)	1 (4/4)	1 (4/4)

Analýza úlohy P2 ukazuje, že současná generace LLM (v testovaných verzích) již netrpí neschopností systematického prohledávání u jednodušších kombinatorických úloh. Klíčovým nálezem je, že modely Copilot a Gemini aktivně integrují inkluzivní definice, což je pro budoucí učitele zásadní. Pokud by model čtverec vynechal, fixoval by u studenta i žáka častou miskoncepci, že čtverec a obdélník jsou izolované pojmy bez vzájemného inkluzivního vztahu. Z hlediska TPACK modely v této úloze prokázaly efektivní synergii mezi technologickou formou a hlubokým didaktickým obsahem. U všech modelů však nadále zůstává velmi problematická symbolická a terminologická správnost odpovědí

5. Závěr

Předkládaná studie podrobila kritické analýze tři dominantní jazykové modely (GPT-4o, Copilot, Gemini 2.0 Flash) v kontextu přípravy materiálů pro konstrukční geometrii na 1. stupni ZŠ. Výsledky šetření ukazují na významný posun v matematické spolehlivosti LLM, ale zároveň odhalují přetrvávající limity v oblasti didaktické a kulturní integrity.

Klíčová zjištění lze shrnout do dvou stěžejních bodů:

1. Logická a pojmová stabilita: Modely vykazují vysokou úspěšnost v detekci matematických sporů (trojúhelníková nerovnost) a v moderním inkluzivním pojetí klasifikace geometrických objektů (klasifikace čtverce jako obdélníku). V této rovině se LLM stávají validním partnerem pro brainstorming studentů.

2. Terminologický a kulturní nesoulad: Výstupy jsou silně ovlivněny anglosaskou symbolikou a při snaze o didaktické zjednodušení sklouzávají k terminologické nepřesnosti, která je v rozporu s českými zvyklostmi.

Z výzkumu vyplývá, že pro budoucí učitele 1. stupně je nezbytné rozvíjet tzv. kritickou technologicko-obsahovou znalost. Umělá inteligence v současné fázi vývoje nemůže sloužit jako autonomní generátor hotových edukačních materiálů, ale pouze jako „hrubý asistent“, jehož výstupy vyžadují důslednou expertní lokalizaci a validaci.

Hlavním přínosem práce je upozornění na fakt, že v éře AI neklesá význam hluboké oborové a didaktické přípravy studentů; naopak, tato erudice se stává jedinou funkční pojistkou proti šíření technologicky generovaných miskoncepcí v primárním vzdělávání. Další výzkum by se měl zaměřit na efektivitu cíleného promptingu (tzv. chain-of-thought) při eliminaci zjištěných terminologických nepřesností.

Acknowledgements

Příspěvek vznikl v rámci realizace projektu „Inovativní přístup k přípravě budoucích učitelů matematiky v éře umělé inteligence“ č. projektu: IGA_PdF_2025_034, realizovaného na Katedře matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.

Literatura

- Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 461–555). Information Age Publishing.
- De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? In *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 248–255). Stellenbosch University.
- Frieder, S., Pinchetti, L., Chevalier, A., Griffiths, R.-R., Salvatori, T., Lukasiewicz, T., Petersen, P. C., & Bibani, N. (2023). *Mathematical capabilities of ChatGPT*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.13867>
- Huang, L., Yu, W., Ma, W., Zhong, W., Feng, Z., Wang, H., Chen, Q., Peng, W., Feng, X., Qin, B., & Liu, T. (2023). A survey on hallucination in large language models: Principles, taxonomy, challenges, and open questions. *arXiv*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2311.05232>
- Koehler, M. J., & Mishra, P. (2013). *The Technological Pedagogical Content Knowledge Framework for Teachers and Teacher Educators*. Commonwealth Educational Media Centre for Asia.
- Koehler, M. J., Mishra, P., & Cain, W. (2013). What is technological pedagogical content knowledge (TPACK)? *Journal of Education*, 193(3), 13–19. <https://doi.org/10.1177/002205741319300303>
- Polák, J. (2019). Didaktika matematiky v 21. století a realita výuky. *Učitel matematiky*, 27(2), 91–105.
- Rosenberg, J. M., & Koehler, M. J. (2015). Context and Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK). *Journal of Research on Technology in Education*, 47(3), 186–210. <https://doi.org/10.1080/15391523.2015.1052663>
- Vojkůvková, I. (2012). The van Hiele model of geometric thinking. In *WDS'12 Proceedings of Contributed Papers, Part I* (pp. 72–75). Matfyzpress.
- Žilková, K. (2013). *Teória a prax geometrických manipulácií v primárnom vzdelávaní*. Praha: Powerprint.