

STATICKÝ A DYNAMICKÝ PRÍSTUP K ZÁPISU ČÍSLA A JEHO PREVODOM MEDZI ČÍSELNÝMI POZIČNÝMI SÚSTAVAMI

Jana HNATOVÁ

Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (Slovenská republika)

jana.hnatova@unipo.sk

Abstrakt

Zápis čísla v danej pozičnej sústave a jeho prevod medzi rôznymi pozičnými sústavami je v matematike možné realizovať viacerými metódami, podrobnejšie sú rozpracované tri základné metódy prevodu – substitučná metóda, metóda delenia základom a metóda násobenia základom. Podobne, aj k výučbe uvedenej problematiky je možné, a to už na propedeutickej úrovni, pristupovať rôznymi spôsobmi. Za jeden z podmieňujúcich faktorov možno považovať uchopenie obsahu matematického vzdelávania samotným učiteľom. Pri statickom vnímaní je tento obsah možné prezentovať v podobe súboru faktov a vzorcov. Pri dynamickom vnímaní obsahu, je jeho sprístupňovanie založené na učení prostredníctvom skúmania procesov a súvislostí. Tu je žiadúce, aby učiteľ dokázal identifikovať nielen dynamické prepojenia vo vnútri vzdelávacej oblasti Matematika a informatika, ale aj jej prepojenia s ďalšími vzdelávacími oblasťami školskej edukácie. V článku sú prepojenia s oblasťami Človek a spoločnosť a Umenie a kultúra verifikované ukážkami izomorfných úloh, ktoré možno zaradiť do rôznych školských i voľnočasových aktivít. Dynamické sprístupnenie uvedeného obsahu je podporené autorsky spracovanými appletmi pracujúcimi na báze technológie rozšírenej reality, ktorú využíva aj voľne dostupný matematický softvér GeoGebra. Článok taktiež prináša parciálne výskumné zistenia z pilotného testovania učebnej podpory pracujúcej s technológiou rozšírenej reality. Výsledky poukazujú na záujem študentov o prácu s touto technológiou a podporu jej aktívneho začleňovania do pregraduálnej matematickej prípravy.

Kľúčové slová: interdisciplinárne vyučovanie, izomorfné slovné úlohy, rozšírená realita

A STATIC AND DYNAMIC VIEW ON NUMBER REPRESENTATION AND ITS CONVERSION BETWEEN POSITIONAL NUMERAL SYSTEMS

Abstract

The representation of a number in a given positional numeral system and its conversion between different positional systems can be performed using several methods in mathematics. This article elaborates on three fundamental conversion methods: the substitution method, the base division method, and the base multiplication method. Similarly, the teaching of this topic—even at the propedeutic level—can be approached in various ways. One of the key determining factors is how the mathematics education content is conceptualized by the teacher. From a static perspective, the content may be presented as a set of facts and formulas. In contrast, a dynamic perspective is based on learning through the exploration of processes and interrelations. In this context, it is essential for the teacher to identify not only the internal dynamic connections within the subject area of Mathematics and Informatics, but also its interdisciplinary links with other educational domains. The article verifies interdisciplinary connections with the domains of Human and Society and Art and Culture through examples of

isomorphic tasks suitable for inclusion in both classroom and extracurricular activities. The dynamic approach to the topic is supported by original applets utilizing augmented reality technology, as employed by the freely available mathematics software GeoGebra. The article also presents partial research findings from pilot testing of educational support materials using augmented reality. The results indicate students' interest in working with this technology and support its active integration into undergraduate mathematics education.

Keywords: augmented reality, interdisciplinary teaching, isomorphic word problems

1. Úvod

Kompetentný učiteľ matematiky je podľa viacerých štúdií chápaný ako učiteľ so širokou škálou všeobecných, odborných a pedagogicky orientovaných vedomostí a zručností ako aj s rozvinutými afektívno-motivačnými charakteristikami. (Blömeke et al., 2020; Nováková, 2020). Vedomosti a zručnosti učiteľa sa dokázateľne prejavujú v jeho výkone, v zmysle kvality výučby. Podobne učiteľovo chápanie sprístupňovaného obsahu matematického vzdelávania ovplyvňuje výber ním použitých metód a prostriedkov. V statickom pohľade učiteľ zobrazuje matematický obsah ako algoritmizovaný súbor faktov a vzťahov vyjadrených vzorcami, ktoré sú zvládnuteľné memorovaním. V dynamickom chápaní obsahu, je jeho sprístupňovanie založené na učení prostredníctvom skúmania procesov (Hannula et al., 2016).

Statický i dynamický pohľad na sprístupnenie vzdelávacieho obsahu v rámci školskej aj voľnočasovej matematiky dovoľuje množstvo tém. Z nich bude v ďalšom texte konkretizované prepojenie zápisu čísla v danej číselnej pozičnej sústave a prevodu čísla medzi číselnými pozičnými sústavami s nerovnakým základom, a to naprieč viacerými školskými vzdelávacími oblasťami. Existenciu prepojení medzi matematickým obsahom a obsahom ďalších vzdelávacích oblastí možno identifikovať pomocou izomorfných úloh, ktoré sú v týchto oblastiach kontextovo ukotvené. Podľa Petráčovej a Krausa (2005) vyjadruje izomorfizmus vo všeobecnosti vzťah medzi dvoma objektmi, resp. systémami, ktorý poukazuje na úplnú zhodu alebo podobnosť ich štruktúr, resp. úplnú funkčnú zhodu. Reed (1987), Amti a Retnowati (2024) zhodne charakterizujú izomorfné slovné úlohy ako úlohy, ktoré napriek nerovnakému konceptu slovne formulovaného problému, teda napriek rozdielnemu príbehu, spejú k rovnakej stratégii riešenia. Podľa Tomovej (2015) izomorfizmus pomáha študentom v ich učiteľskej príprave. Rizikom je však jednoduché napodobňovanie postupov bez dostatočného porozumenia. Naším zámerom je preto vychádzať zo znalostí matematického obsahu a identifikovať možnosti podpory jeho dynamického zobrazenia, ktoré by umožnili skúmanie procesov sprevádzajúcich zápis čísla a jeho prevod medzi číselnými sústavami s využitím technológie rozšírenej reality (ang. *augmented reality*, skr. AR).

2. Metódy zápisu čísla v danej pozičnej sústave a prevodu čísla medzi číselnými pozičnými sústavami

Nech je v danej číselnej pozičnej sústave so základom $z \in \mathbb{N}$, kde $z > 1$, dané nenulové prirodzené číslo N rádu k , t. j. jeho zápis pozostáva z $k + 1$ číslic označených n_k až n_0 , pre ktoré platí $0 \leq n_i < z$. Podľa vety o rozvoji prirodzeného čísla možno takéto číslo jednoznačne zapísať v tvare:

$$N \stackrel{(1)}{=} (n_k n_{k-1} n_{k-2} \dots n_1 n_0)_z \stackrel{(2)}{=} \sum_{i=0}^k n_{k-i} \cdot z^{k-i}$$

Rovnosť (1) zavádza skrátenejší zápis čísla N a rovnosť (2) rozšírený, resp. rozvinutý zápis čísla N v danej číselnej pozičnej sústave so základom z alebo tiež v z -adickej sústave.

Podobne na prevod čísla medzi dvoma adickými sústavami možno využiť viaceré metódy, ku ktorým patria substitučná metóda, metóda delenia základom a metóda násobenia základom. Ďalšie konkretizácie budú zacielené na ukážky práce s dvojkovou pozičnou sústavou, ktorej propedeutické využitie, ako bude v nasledujúcich prepojeniach demonštrované, možno nájsť už v rámci primárneho matematického vzdelávania.

Substitučná metóda dovoľuje nahradiť zápis binárneho čísla N polynómom (3),

$$N = \sum_{i=0}^k n_{k-i} \cdot 2^{k-i} = n_k \cdot 2^k + n_{k-1} \cdot 2^{k-1} \dots + n_3 \cdot 2^3 + n_2 \cdot 2^2 + n_1 \cdot 2^1 + n_0 \cdot 2^0 \quad (3)$$

pričom číslice n_k až n_0 nadobúdajú pre dvojkovú pozičnú sústavu len hodnoty z číselnej množiny $\{0, 1\}$. Vyjadrením súčtu členov polynómu v dekadickom zápise získavame prevod binárneho čísla do desiatkovej pozičnej sústavy. Konkrétnou statickou ukážkou použitia tejto metódy je algoritmický prevod binárneho zápisu čísla 10010 do dekadického postupom (4).

$$(10010)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 16 + 2 = 18_{10} \quad (4)$$

Ďalšou používanou metódou prevodu je metóda delenia základom. Tá spočíva v delení daného prirodzeného čísla a jeho vznikajúcich podielov základom číselnej sústavy, do ktorej sa zápis čísla prevádza. Teda prirodzené číslo N , ktoré má byť zapísané v dvojkovej sústave, možno deliť celočíselne číslom 2 a zapísať v podobe podielu P_1 so zvyškom $n_0 \in \{0, 1\}$ (5).

$$N = \sum_{i=0}^k n_{k-i} \cdot 2^{k-i} = \underbrace{(n_k \cdot 2^{k-1} + n_{k-1} \cdot 2^{k-2} \dots + n_3 \cdot 2^2 + n_2 \cdot 2^1 + n_1 \cdot 2^0)}_{P_1} \cdot 2 + n_0 \quad (5)$$

Analogicky možno pokračovať delením podielov P_1 až P_k , končiac nulovým podielom. Výstupom prevodu do dvojkovej sústavy je číslo N s pozičným zápisom číslic $n_k n_{k-1} \dots n_2 n_1 n_0$ (6).

$$\begin{aligned} P_1 &= \underbrace{(n_k \cdot 2^{k-2} + \dots + n_3 \cdot 2^1 + n_2 \cdot 2^0)}_{P_2} \cdot 2 + n_1 \\ P_2 &= \underbrace{(n_k \cdot 2^{k-3} + \dots + n_3 \cdot 2^0)}_{P_3} \cdot 2 + n_2 \\ &\vdots \\ P_{k-1} &= \underbrace{(n_k \cdot 2^0)}_{P_k} \cdot 2 + n_{k-1} \\ P_k &= 0 \cdot 2 + n_k \end{aligned} \quad (6)$$

Konkrétnou ukážkou použitia tejto metódy, napr. pri prevode čísla 18 do binárneho zápisu je postup (7), ktorý je aj v školskej matematike bežne zaužívaný. V ňom sa realizuje opakujúce sa delenie čísla 18 a jeho podielov základom 2, pri ktorom vznikajúce zvyšky $n_0 = 0$, $n_1 = 1$, $n_2 = 0$, $n_3 = 0$ a $n_4 = 1$ umožňujú zapísať číslo 18 v dvojkovej pozičnej sústave zápisom: $18_{10} = (10010)_2$.

$$\begin{array}{ccccc} 18 : 2 = 9 \text{ zv. } 0; & 9 : 2 = 4 \text{ zv. } 1; & 4 : 2 = 2 \text{ zv. } 0; & 2 : 2 = 1 \text{ zv. } 0; & 1 : 2 = 0 \text{ zv. } 1 \\ 0 = n_0 & 1 = n_1 & 0 = n_2 & 0 = n_3 & 1 = n_4 \end{array} \quad (7)$$

Metóda násobenia základom dopĺňa predchádzajúce postupy. Je určená na prevod desatinnej časti racionálneho čísla medzi dvoma číselnými pozičnými sústavami. Majme číslo M , pre ktoré platí $0 < M < 1$, vyjadrené polynómom (7) na k platných číslic.

$$M = \sum_{i=-1}^{-k} n_i \cdot 2^i \quad (7)$$

kde n_{-1} až n_{-k} sú čísla z množiny $\{0, 1\}$ pričom $n_{-k} \neq 0$. Po úprave opakovaným násobením číselným základom cieľovej sústavy a následnom spisovaní číslice na pozícii jednotiek dostávame zápis desatinnej časti čísla v dvojkovej pozičnej sústave (8).

$$\begin{aligned} M &= n_{-1} \cdot 2^{-1} + n_{-2} \cdot 2^{-2} + \dots + n_{-k} \cdot 2^{-k} \\ M &= 2^{-1}(n_{-1} + n_{-2} \cdot 2^{-1} + n_{-3} \cdot 2^{-2} + \dots + n_{-k} \cdot 2^{-k+1}) \quad / \cdot 2 \\ M \cdot 2 &= n_{-1} + \underbrace{n_{-2} \cdot 2^{-1} + n_{-3} \cdot 2^{-2} + \dots + n_{-k} \cdot 2^{-k+1}}_{Q_1} \\ Q_1 &= 2^{-1}(n_{-2} + n_{-3} \cdot 2^{-1} + \dots + n_{-k} \cdot 2^{-k+2}) \quad / \cdot 2 \\ Q_1 \cdot 2 &= n_{-2} + \underbrace{n_{-3} \cdot 2^{-1} + \dots + n_{-k} \cdot 2^{-k+2}}_{Q_2} \\ &\vdots \\ Q_{k-1} &= 2^{-1} \cdot n_{-k} + 0 \quad / \cdot 2 \\ Q_{k-1} \cdot 2 &= n_{-k} \end{aligned} \quad (8)$$

Použitie tejto metódy pre prevod čísla 0,375 do binárneho zápisu je uvedené v nasledujúcej schéme (schéma 1).

Schéma 1. Prevod čísla 0,375 do dvojkovej sústavy metódou násobenia

$(0,375)_{10}$	$(0,011)_2$
$0,375 \cdot 2 = 0,75$	$= 0 + 0,75$
$0,75 \cdot 2 = 1,5$	$= 1 + 0,5$
$0,5 \cdot 2 = 1$	$= 1 + 0$

3. Prepojenie s dejepisným komponentom oblasti Človek a spoločnosť

V historickom kontexte možno identifikovať prepojenia na uvedené metódy zápisu a prevodu čísla medzi dvoma adickými sústavami v rôznych historických obdobiach.

Použitie polynomického rozkladu čísla možno nájsť už v egyptskom spôsobe násobenia zaznamenanom na Rhindovom papyruse (Čižmár, 2017). Tento je založený na binárnom zápise jedného z činiteľov, kde sa v jednom stĺpci realizuje postupné zdvojnásobovanie hodnôt počínajúc číslom 1 a končiac najbližším číslom, ktoré je menšie nanajvýš rovné danému činiteľu. Postupne sa tak vytvára zápis prvých k členov postupnosti $\{2^n\}_{n=0}^{\infty}$. Ten dovoľuje nájsť jednotlivé členy polynomického rozkladu daného činiteľa postupným odčítaním najbližších menších mocnín čísla 2 od vznikajúcich rozdielov (schéma 2).

Schéma 2: Zdvojnásobovanie dosiahnutého čísla podľa egyptské spôsobu násobenia

	18_{10}	10010_2
	$1 = 2^0$	0
✓	$2 = 2^1$	1
	$4 = 2^2$	0
	$8 = 2^3$	0
✓	$16 = 2^4$	1

V uvedenej schéme je 2^4 najvyššou mocninou základu 2, ktorá je menšia nanajvýš rovná danému číslu 18. Túto mocninu teda možno využiť v polynomicom rozklade čísla v podobe jej jedennásobku. Preto riadok v schéme označíme, resp. priradíme mu hodnotu 1. Po odčítaní ($18 - 16 = 2$) opätovne odhadujeme vzniknutý rozdiel najbližšou menšou mocninou, tomto prípade rovnou mocninou 2^1 . Riadok obsahujúci uvedenú mocninu opäť označíme, hodnoty odčítame ($2 - 2 = 0$) a v prípade, ak by bol novovzniknutý rozdiel nenulový, postup znova zopakujeme. Po ukončení odčítania priradíme zvyšným mocninám hodnotu 0 chápanú ako nulový násobok mocniny v polynomicom rozklade hľadaného čísla. Číslo 18 je teda možné zapísať ako súčet čísel 16 a 2, tiež ako súčet mocnín 2^4 a 2^1 . Podľa vzťahu (3) má skrátenejší zápis čísla 18 v dvojkovej sústave číslicu 1 na pozícii 4. a 1. rádu, pričom ostatné pozície obsahujú číslicu 0.

Izomorfnú úlohu prepájajúcu tento, v histórii známy, postup prevodu čísla so školským matematickým obsahom možno nájsť v učebnici matematiky pre 3. ročník ZŠ (Hejný et al., 2009, s. 81): *Bilandskú sumu meníme na A-groše pomocou prevodů: Bg = 2 Ag; Cg = 4 Ag; Dg = 8 Ag; Eg = 16 Ag; Fg = 32 Ag. Vyjádři jako bilandskou sumu 18 Ag.* Tu je potrebné doplniť, že jednou zo základných požiadaviek platby v bilandskej mene je výber najviac jednej mince danej hodnoty, ktorá bude v platbe výslednej sumy použitá. Algoritmické riešenie úlohy (schéma 2) možno v dynamickom pohľade na sledované procesy v úlohách tohto typu skúmať s prepojením na informatiku a s využitím AR. V snahe vyhnúť sa duplicitě je uvedený pohľad konkretizovaný v časti 5.

Z historického pohľadu ponúka pragmatické využitie ďalšej, nami popisovanej metódy delenia základom, ruské, niekedy označované ako „sedliacke“ alebo „rolnícke“ násobenie (Porubský, 2009). Ruské násobenie je jedným z možných spôsobov násobenia dvoch prirodzených čísel, ktoré vyžaduje schopnosť aplikovať metódu delenia základom 2 na jednom z činiteľov. Pomocou nej sa opakovaným delením dvomi rozkladá jeden z činiteľov, pričom sú sledované zvyšky po delení, resp. sleduje sa ich parita. Výsledný binárny zápis čísla možno tvoriť spísaním zvyškov po delení v poradí odzadu dopredu, resp. zdola nahor (schéma. 3).

Schéma 3: Opakované delenie čísla 18 na polovice v ruskom spôsobe násobenia

	$18_{10} = 10010_2$	
	$18 : 2 = 9$	zv. 0
✓	$9 : 2 = 4$	zv. 1
	$4 : 2 = 2$	zv. 0
	$2 : 2 = 1$	zv. 0
✓	$1 : 2 = 0$	zv. 1

Aj v tomto prípade je jeden z možných dynamických pohľadov na uvedený algoritmus popísaný s prepojením na informatikou a prácu s AR v časti 5.

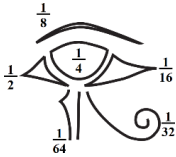
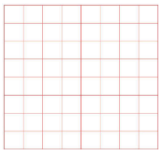
Pri ostatne zmieňovanej metóde násobenia základom je možné nájsť styčné elementy binárneho zápisu desatinnej časti racionálneho čísla s egyptským spôsobom zápisu zlomkov. Podľa Vymazalovej (2004) boli u Egyptanov v tomto ohľade svojim zápisom špecifické zlomky $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ a $\frac{1}{64}$, nazývané tiež zlomky Hórovho oka. Každý zlomok mal vlastný znak, odlišný od bežne používaných egyptských zlomkov a popisoval jeho jednu konkrétnu časť (obr. 1). Predpokladá sa, že tieto zlomky vznikli v procese poltenia celku a v starovekom Egypte sa využívali výhradne pri meraní objemu a s ním súvisiacimi prepočtami objemových jednotiek. Podľa dochovaných záznamov bolo pre Egyptanov zdvojnásobovanie zlomkov Hórovho oka jednoduché a vysoko praktické (Bečvář et al., 2003; Vymazalová, 2004).

Izomorfne úlohy využívajúce takéto prepojenie histórie a matematiky možno propedeuticky zaradiť do výučby matematiky v 2. cykle ZŠ, kde je v rámci matematických vzťahov požadované pochopenie ekvivalentnosti zlomkov na rôznych modeloch a ich využívanie pri sčítaní a odčítaní v obore kladných čísel (obr. 1).

Znak Horovho oka sa používal už v starovekom Egypte na vyjadrenie častí celku. Skús to aj ty.

Úloha:

Vyfarbi časť, ktorá zodpovedá $\frac{3}{4}$.


Obrázok 1. Prepojenie vzdelávacích oblastí Matematika a informatika s oblasťou Človek a spoločnosť izomorfnými úlohami.

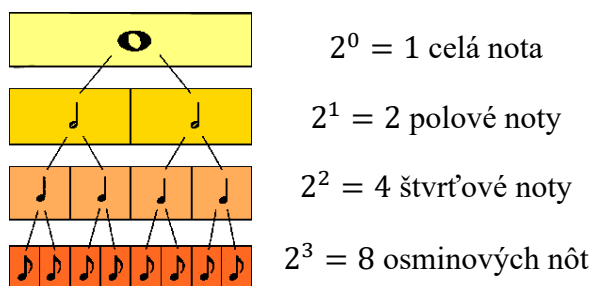
V sumarizácii dejepisného komponentu vzdelávacej oblasti Človek a spoločnosť pre 2. cyklus ZŠ možno konštatovať, že v súčasnosti overovanom Štátnom vzdelávacom programe pre základné vzdelanie (ďalej len ŠVP) sa nachádza požiadavka charakterizovať vybranú starovekú civilizáciu aj s ohľadom na dosahovanú úroveň starovekého poznania vied, napr. matematiky (NIVAM, 2023). Je na škodu veci, že v nadväzujúcom cykle, ustupuje poznanie historického vývoja vied do pozadia pred geopolitickými, hospodárskymi a kultúro-spoločenskými charakteristikami jednotlivých období a to na úrovni poznania jak svetových, tak aj národných dejín.

4. Prepojenie s hudobnou výchovou v oblasti Umenie a kultúra

Druhou oblasťou, na ktorú sme v rámci hľadania prepojení s riešenou problematikou zamerali bola hudobná výchova začlenená do oblasti Umenie a kultúra.

Elementy používania dvojkovej sústavy možno identifikovať aj v jej obsahu, kde podľa ŠVP je pri určovaní hodnôt hudobných nôt súčasne rozvíjaná matematická, čitateľská i vizuálna gramotnosť (NIVAM, 2023). V 1. cykle ZŠ sa od žiaka očakáva hra podľa grafickej partitúry či z notového zápisu v štvrtových a osminových hodnotách. To zo sebou prináša základné poznanie o dĺžke trvania tónov, pre ktoré platí, že jedna nota väčšej hodnoty (čo do trvania) zodpovedá dvom notám najbližšej menšej hodnoty. V 2. cykle pribúda požiadavka hry z notového zápisu v polových hodnotách a v 3. cykle je už pri hre na hudobnom nástroji požadované aktívne a vedomé používanie hudobného písma v podobe klasickej notácie a akordických značiek (NIVAM, 2023).

Pri určovaní hodnôt hudobných nôt je na hodinách hudobnej výchovy často využívaná tzv. rytmická pyramída, v ktorej má podľa zavedeného pravidla celá nota hodnotu dvoch polových nôt, polová nota dvoch štvrtových nôt, štvrtová nota dvoch osminových nôt atď. (obr. 2).



Obrázok 2. Rytmická pyramída

Prepojenosť oblastí možno deklarovať izomorfizmom úlohy kontextovo súvisiacou s oblasťou Umenie a kultúra: „Zistiť, koľko šesnásťtinových, resp. dvaatridsatínových nôt má hodnotu celej noty.“ a slovnej úlohy riešenej na hodinách matematiky: „Prelož papier A4 na polovicu. Tú polovicu prelož opäť na polovicu. Pokračuj takto ďalej. Eviduj, koľko vrstiev vzniklo každým preložením.“ (Hejný et al., 2022). V oboch úlohách totiž existuje stratégia riešenia využívajúca rovnaký matematický model.

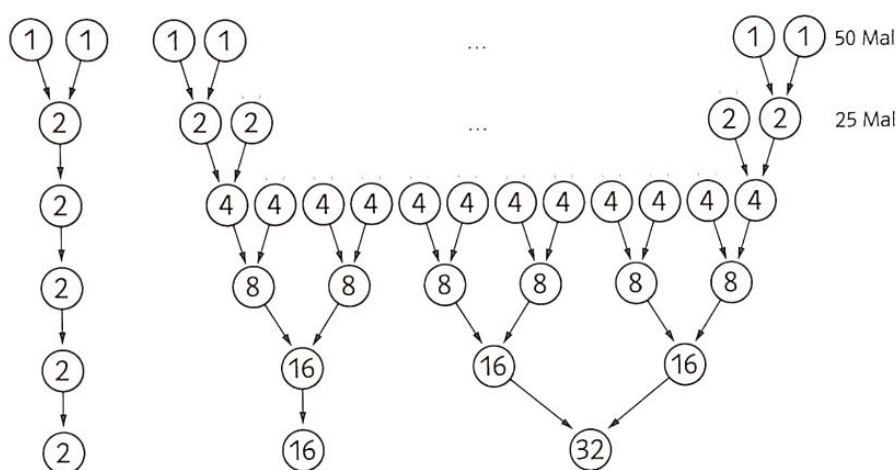
5. Prepojenie s informatikou v rámci oblasti Matematika a informatika s využitím digitálnych technológií

Tretou oblasťou, v ktorej bolo možné identifikovať prepojenia s riešenou problematikou a ktorá navyše ponúka možnosť dynamizovať uvedené postupy použitím digitálnych technológií je oblasť matematiky a informatiky. Konkrétne v informatike je binárny kód kľúčovým stavebným prvkom, ktorý dovoľuje prispôbiť vyjadrenie informácie možnostiam daného technického zariadenia. Pri práci s elektrickým signálom v počítačoch sa popisujú dva stavy „zapnuté“ (1) a „vypnuté“ (0), pričom všetky dáta a inštrukcie sú prevádzané do tejto binárnej formy využívajúcej matematické princípy dvojkovej pozičnej sústavy.

V švajčiarskych učebniciach informatiky je propedeutika zápisu čísla v dvojkovej pozičnej sústave zaradená do výučby v rámci primárneho stupňa vzdelávania (Dagiene et al., 2021; Hromkovič & Lacher, 2019). Úlohy sú situované do krajiny BIN, v ktorej prebiehajú platby len pomocou dostupných mincí v hodnote 1, 2, 4, 8, 16, 32 a 64, teda nasledujúca minca má vždy dvojnásobnú hodnotu ako predchádzajúca, pričom pri platbách platí pravidlo najmenšieho počtu mincí. Požiadavka zaplata sumy 50 v BIN je vysvetlená dvoma spôsobmi. Prvý z nich (obr. 3) korešponduje s použitím substitučnej metódy zápisu čísla v dvojkovej pozičnej sústave. Druhý spôsob platby (obr. 4) korešponduje s použitím metódy delenia základom.

$$50 = \textcircled{32} + 18 \quad 50 = \textcircled{32} + \textcircled{16} + 2 \quad 50 = \textcircled{32} + \textcircled{16} + \textcircled{2}$$

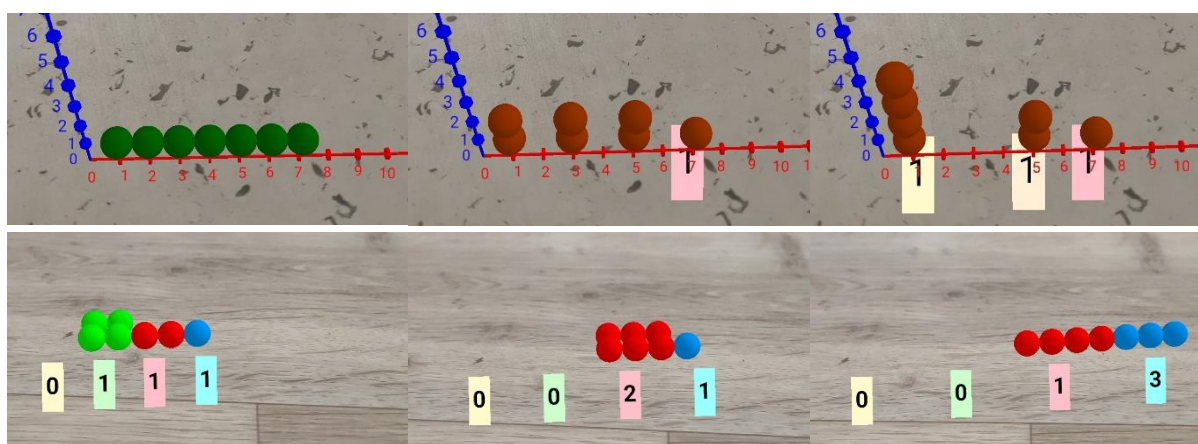
Obrázok 3. Platba v krajine BIN modelovaná substitučnou metódou
Zdroj: (Hromkovič & Lacher, 2019, s. 58)



Obrázok 4. Platba v krajine BIN modelovaná metódou delenia základom
Zdroj: (Hromkovič & Lacher, 2019, s. 59)

Uvedené postupy je možné dynamizovať viacerými spôsobmi. Jedným z nich je reálne použitie mincí, resp. ich modelov. Pomocou nich možno demonštrovať použitie metódy delenia základom postupným skladaním mincí na kôpky kopírujúc postup (obr. 4). Ďalšou možnosťou je využitie digitálnych technológií, ktoré umožňujú nielen realizovať numerické výpočty, ale aj experimentovať a objavovať nové poznatky, modelovať, prezentovať a zdieľať matematický obsah (Wossala & Seidlová, 2022). AR technológia k týmto možnostiam pridáva prepojenie skutočného a virtuálneho prostredia, v ktorom skutočné a virtuálne objekty koexistujú (Di Serio et al., 2013) a žiak s nimi môže priamo alebo nepriamo interagovať (Hnatová, 2023).

Práca s AR technológiou je podporovaná aj voľne dostupným matematickým softvérom GeoGebra (<https://www.geogebra.org>). Zámerom v tomto prostredí vytvorených AR appletov (t.j. appletov podporujúcich inkorporáciu AR do matematickej edukácie) bola dynamická vizualizácia algoritmov prevodu čísel z desiatkovej do dvojkovej sústavy a späť (obr. 5 - hore) a prevodu čísel medzi číselnými sústavami s rôznym základom (obr. 5 - dole).

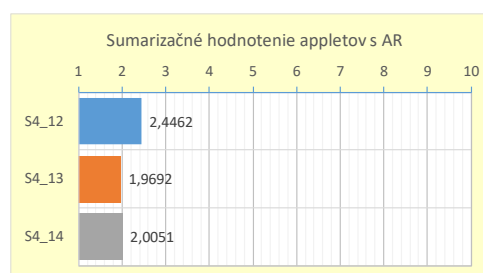


Obrázok 5. Ukážka dynamicky spracovaného prevodu čísla 7 z desiatkovej do dvojkovej číselnej sústavy a jeho zápisu v číselnej sústave so základom 2, 3 a 4 pomocou AR.

Celkovo päť appletov zameraných na zápis čísla v pozičnej sústave a na prevod čísla medzi dvoma pozičnými sústavami, vybraných z autorsky vytvorenej databázy AR appletov (Hnatová et al., 2024), bolo hodnotených v pilotnom testovaní, a to študentmi bakalárskeho študijného odboru predškolská a elementárna pedagogika ($N = 20$) a študentmi magisterského študijného odboru učiteľstvo pre primárne vzdelávanie ($N = 19$). Následne, v dotazníkovom šetrení, na desaťbodovej Likertovej škále s rozložením od 1 – úplná spokojnosť až 10 – úplná nespokojnosť, títo študenti hodnotili svoju používateľskú skúsenosť s jedným z vybraných AR appletov (tab. 1). V položkách s otvorenou odpoveďou sa taktiež vyjadrili k nim zisteným pozitívam a negatívam. Výsledky spoľahlivosti vyhodnocovaných položiek merané Cronbachovým α (Cronbach alpha = 0,8579; Standardiz. alpha = --,9237) naznačujú vysokú reliabilitu merania.

Tabuľka 1 Parciálne výsledky vybraných položiek dotazníkového šetrenia.

Kód	N	Priemer S4_12	Priemer S4_13	Priemer S4_14
djjar89s	20	2,32	2,89	2,71
qm2c4z72	5	6,20	1,60	1,40
vqwjsjdu	5	1,60	1,80	3,00
ysruhegm	2	5,00	1,00	1,00
zagnwbbd	7	4,46	3,29	4,43



V podľa zistených parciálnych výsledkov týkajúcich sa uvedených appletov možno konštatovať, že práca s appletmi v AR bola pre študentov relatívne novou skúsenosťou ($\bar{x}_{S4_12} \doteq 2,45$). Významné rozdiely boli identifikované medzi študentmi bakalárskeho študijného odboru predškolská a elementárna pedagogika, ktorí seminár povinne voliteľného predmetu Matematika a počítač absolvovali, a študentmi, ktorí tento predmet neabsolvovali.

Vysokú mieru spokojnosti s funkčnosťou vybraného appletu vyjadriло priemerne 8 z 10 študentov. V zodpovedajúcej položke $S4_13$ bol dosiahnutý priemer $\bar{x}_{S4_13} \doteq 1,97$ s rozsahom údajov v intervale [1,5].

Porovnateľnú mieru podpory vyslovili študenti zaradeniu testovaných appletov do ďalšej výučby ($\bar{x}_{S4_14} \doteq 2,00$). Kladne hodnotená bola farebná rozlíšiteľnosť objektov, dynamika vizualizácie, možnosť zachytenia výsledkov činnosti snímkou alebo krátkym videom. Na ukážku uvádzame autentické sumárne hodnotenie študentky Anky:

„Zvolený applet považujem za veľmi dobrú a efektívnu didaktickú pomôcku pri prvom kontakte s inou pozičnou sústavou, pri zapisovaní čísel, pri ich rozklade a skladaní. V 3. ročníku je už podľa môjho názoru pre žiakov vhodné prejsť od "klasickej" manipulácie s predmetmi k tomuto digitálnemu spôsobu. Pre žiakov by bola práca s týmto appletom, obzvlášť pri hre, pútavá a zaujímavá.“

Pripomienkované boli technické problémy s načítaním vodorovnej plochy pre zobrazenie objektov v rozšírenej realite, keďže applety pracujú s *Anchor-based AR*, ktorá vyžaduje ukotvenie virtuálnych objektov v reálnom prostredí pomocou povrchovej referenčnej kotvy. Pripomienkovaná bola tiež dlhšia časová odozva pri práci s konkrétnym mobilným zariadením a appletom, ako aj potreba priblížiť alebo oddialiť scénu s objektmi znázornenými v rozšírenej realite kvôli optimalizácii zobrazenia ich veľkosti. Ukážkou je komentár študentky Betky:

„Zobrazenie guľičiek bolo občas veľmi nepresné, keďže sa zobrazovali buď príliš blízko alebo ďaleko, preto bolo potrebné znova načítať povrch alebo zoomovať, aby bolo vidieť zreteľný počet guľičiek rozloženého čísla. Inak práca s appletom bola jednoduchá a určite vhodná pre žiakov 1. stupňa. Učiteľka má veľa možností na prácu v oblasti matematiky a riešenia vzťahov.“

6. Záver

V súčasnosti zavádzaný ŠVP pracuje s víziou troch pilierov kurikula stojacich na základoch, ku ktorým tiež patrí „prostredie bohaté na digitálne technológie, ktoré efektívne a bezpečne využívajú učitelia i žiaci vo výchove a vzdelávaní.“ (NIVAM, 2023, s. 4). S konkretizovaným a zmysluplným využívaním digitálnych technológií by sa mali študenti – budúci pedagógovia stretnúť už v rámci svojej pregraduálnej prípravy. Konkretizácia výberu vhodných tematických oblastí pre inkorporáciu AR do matematickej edukácie je diskutovaná vo viacerých štúdiách (Hnatová et al., 2024; Lipták, 2024; Mokriš et al., 2023; Prídavková, 2023). Zmyslupnosť výberu je v kontexte tohto článku vnímaná ako podpora prechodu medzi statickým a dynamickým prístupňovaním matematického edukačného obsahu.

Dosahovanie hlavných cieľov základného vzdelávania je deklarované prostredníctvom „vyučovania zameraného na nadobudnutie doménových a prierezových gramotností“ (NIVAM, 2023, s. 5), čím je zároveň deklarovaná potreba, priam nutnosť vzájomne prepájať jednotlivé vzdelávacie oblasti. V primárnej matematickej edukácii môžu ako spájajúce elementy slúžiť izomorfné slovné úlohy, ktoré napriek rôznym kontextom zasahujúcim do rôznych vzdelávacích oblastí, vedú k jednotnej stratégii ich matematického riešenia.

Ukazuje sa, že schopnosť identifikovať izomorfné úlohy, riešiť ich a spolu so žiakmi odhaľovať súvislosti medzi nimi v rôznych vzdelávacích oblastiach aj s pomocou digitálnych technológií, sa stáva pre budúceho pedagóga pôsobiaceho v primárnom vzdelávaní, nevyhnutnosťou.

Acknowledgements

Príspevok vznikol s podporou grantového projektu KEGA 024PU-4/2024 *Technológia rozšírenej reality a jej inkorporácia do matematickej prípravy študentov v študijnom programe Predškolská a elementárna pedagogika* riešeného na PF PU v Prešove.

Príspevok vznikol s podporou grantového projektu VEGA 1/0734/25 *Učenie sa v súvislostiach v matematickej edukácii - výskum možností integrácie doménových a prierezových gramotností v kontexte kurikulárnej transformácie* riešených na PF PU v Prešove.

Literatúra

- Amri, C., & Retnowati, E. (2024). Some isomorphic problems in proportion. *AIP Conference Proceedings*, 2622(1), 140009. <https://doi.org/10.1063/5.0133474>
- Bečvář, J., Bečvářová, M., & Vymazalová, H. (2003). Matematika ve starém Egyptě. In *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*. Prometheus, spol. s r. o. <https://eudml.org/doc/202377>
- Blömeke, S., Kaiser, G., König, J., & Jentsch, A. (2020). Profiles of mathematics teachers' competence and their relation to instructional quality. *ZDM*, 52, 1–14. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01128-y>
- Čižmár, J. (2017). Dejiny matematiky od najstarších čias po súčasnosť. Perfekt.
- Dagiene, V., Hromkovic, J., & Lacher, R. (2021). Designing informatics curriculum for K-12 education: From Concepts to Implementations. *Informatics in Education*, 20(3), 333–360. <https://doi.org/10.15388/infedu.2021.22>
- Di Serio, Á., Ibáñez, M. B., & Kloos, C. D. (2013). Impact of an augmented reality system on students' motivation for a visual art course. *Computers & Education*, 68, 586–596. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.03.002>
- Hannula, M., at all. (2016). Attitudes, Beliefs, Motivation, and Identity in Mathematics Education (s. 1–35). https://doi.org/10.1007/978-3-319-32811-9_1
- Hejný, M., Jirotková, D., Slezáková, J., Kuřík Sukniak, A., Strnad, V., & Ročák, Š. (2022). *Matematika 5. Ročník—Učebnica*. Indícia s r.o.
- Hejný, M., Jirotková, D., Slezáková-Kratochvílová, J., & Michnová, J. (2009). *Matematika 3*. Fraus.
- Hnatová, J. (2023). *Technológia rozšírenej reality v matematickej edukácii: SWOT analýza*. PU v Prešove. <https://elibrary.pulib.sk/elpub/document/isbn/9788055531038>
- Hnatová, J., Prídavková, A., & Lipták, J. (2024). *Rozšírená realita v primárnej matematickej edukácii. Analýza edukačných aktivít študentov – budúcich pedagógov*. Prešovská univerzita v Prešove. <https://elibrary.pulib.sk/elpub/document/isbn/9788055533698>
- Hromkovič, J., & Lacher, R. (2019). *Einfach Informatik 5/6 – Lösungen finden Schulbuch*. Klett und Balmer Verlag. <https://einfachinformatik.ch>

- Lipták, J. (2024). Analýza možností implementácie rozšírenej reality do kurzu rekreačná matematika. In *Transformácia edukácie v predprimárnom, primárnom a špeciálnom vzdelávaní v 21. storočí* (s. 418–426).
- Mokriš, M., Šimčíková, E., & Tomková, B. (2023). Riešenie rovníc v príprave učiteľov elementaristov. *Elementary Mathematics Education Journal*, 5(2), 25–33.
- NIVAM. (2023). Štátny vzdelávací program pre základné vzdelávanie. *Vzdelávanie 21. storočia*. <https://vzdelavanie21.sk/digitalny-statny-vzdelavaci-program/>
- Nováková, E. (2020). Žáci, učitelé a Cvrček: „dělali jsme Cvrčka“ – a co dál? *Učitel matematiky*, 28(4), 194–207.
- Petráčková, V., & Kraus, J. (2005). *Slovník cudzích slov (akademický)* (J. Balážová & J. Bosák, Ed.; 2. doplnené a prepracované vydanie). Slovenské pedagogické nakladateľstvo – Mladé letá. <https://slovník.juls.savba.sk/>
- Porubský, Š. (2009). Ako rýchlo vieme a môžeme násobiť. In J. Bečvář & M. Bečvářová (Ed.), *30. Mezinárodní konference Historie matematiky* (s. 173–179). MATFYZPRESS.
- Prídavková, A. (2023). Modelling of elementary mathematical concepts using augmented reality technology in primary education. *EDULEARN23 Proceedings*, 7249–7254. <https://doi.org/10.21125/edulearn.2023.1893>
- Reed, S. K. (1987). A structure-mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 13(1), 124–139. <https://doi.org/10.1037/0278-7393.13.1.124>
- Tomová, A. (2015). Princip izomorfismu v učitelské přípravě. *Pedagogika*, 65(1), 75–81.
- Vymazalová, H. (2004). Zkusme měřit měřicí. *PRAGUE EGYPTOLOGICAL STUDIES*, 3, 159–167.
- Wossala, J., & Seidlová, P. (2022). Matematická gramotnost v kontextu nového pojetí informatiky. *Elementary Mathematics Education Journal*, 4(2), 46–55.