

TEORIE ČÍSEL V PROBLÉMOVÉ VÝUCE

Jaroslav BERÁNEK

Masarykova Univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)

beranek@ped.muni.cz

Abstrakt

Příspěvek je věnován přípravě budoucích učitelů matematiky a obsahuje témata vhodná k rozvíjení a rozšiřování jejich znalostí. Příspěvek obsahuje dva řešené problémy ze zahraniční matematické soutěže Putnam exam (problém vyvážených trojic a Josephusův problém). Při jejich řešení využijeme mj. dvojkovou poziční číselnou soustavu.

Klíčová slova: dvojková soustava, rekurentní vztah, induktivní postup, iracionální číslo.

NUMBERS THEORY IN PROBLEMS TEACHING

Abstract

The article is devoted to teaching of future teachers of Mathematics and deals with some topics for deepening and enlarging of their knowledge. The article contains two solved problems from the international Mathematics competition Putnam Exam (problem of harmonious triads and Josephus problem). While solving these problems also the binary number system is used.

Keywords: binary system, recurrence relation, inductive method, irrational number.

1. Úvod

V současné době dochází v obsahu výuky na základních školách k významným změnám, které se týkají rovněž výuky matematiky. Na tuto skutečnost musí odpovídajícím způsobem reagovat příprava nejen budoucích učitelů matematiky na 2. stupni ZŠ, ale i budoucích učitelů 1. stupně základní školy. V matematice je nutné kromě základního učiva a potřebného nadhledu k němu poskytovat studentům další témata, která nejsou příliš vzdálena od osnov školské matematiky a která mohou rozvíjet jejich matematické znalosti a dovednosti. Současně je nutné seznamovat studenty s možnostmi pro zájmovou činnost v matematice a s různými typy matematických soutěží, a to i na 1. stupni ZŠ. V tomto příspěvku jsou obsaženy dva řešené problémy ze zahraniční matematické soutěže Putnam exam. Tato soutěž Williama Lowella Putnama se poprvé konala v roce 1938 a každoročně se jí zúčastňují zájemci z řad studentů vysokých škol v USA a v Kanadě. Je to náročná soutěž, trvající šest hodin. Je rozdělena na dvě části po třech hodinách, přičemž v každé části řeší studenti šest problémů. Oba problémy, které jsou obsahem tohoto příspěvku, mají tematicky společné to, že při jejich řešení využijeme dvojkovou poziční číselnou soustavu. Převody zápisů čísel z desítkové do dvojkové soustavy a naopak považujeme za známé, stejně jako číselný obor reálných čísel. Oba uvedené problémy jsou převzaty z publikace L. C. Larsona (Larson, 1990), o Josephusově problému je možno nalézt podrobnější informace v článku P. Pavlíkové (Pavlíková, 2012) i na www-stránkách (Weisstein, 2017).

2. Problém vyvážených trojic

Zadání problému: Uspořádaná trojice (x_1, x_2, x_3) kladných iracionálních čísel s vlastností $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ se nazývá vyvážená trojice, jestliže $x_i < \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, 3$. Není-li trojice vyvážená, tj. existuje právě jeden index $j \in \{1, 2, 3\}$ s vlastností $x_j > \frac{1}{2}$ (čísla jsou iracionální), provedeme vyvažovací operaci V definovanou takto:

$$V(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3), \text{ kde } y_i = 2x_i \text{ v případě } i \neq j, y_j = 2x_j - 1.$$

Není-li trojice (y_1, y_2, y_3) vyvážená, provedeme tutéž vyvažovací operaci znovu. Vede vždy tento proces po konečném počtu vyvažovacích operací V k vyvážené trojici?

Řešení problému: Úvodem poznamenejme, že po každém provedení vyvažovací operace V bude vždy platit $y_1 + y_2 + y_3 = 1$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $\frac{1}{2} < x_3 < 1$.

Z předpokladu $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ plyne $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2$, odkud plyne platnost rovnosti $2x_1 + 2x_2 + (2x_3 - 1) = 1$. S ohledem na definici operace V dostáváme $y_1 + y_2 + y_3 = 1$. Využijeme dvojkovou soustavu. Čísla x_1, x_2, x_3 vyjádříme ve tvaru:

$$x_1 = 0, a_1 a_2 a_3 \dots, x_2 = 0, b_1 b_2 b_3 \dots, x_3 = 0, c_1 c_2 c_3 \dots \quad (1)$$

kde všechny cifry $a_i, b_i, c_i, i \in \mathbb{N}$ jsou buďto 0 nebo 1. Je-li trojice (x_1, x_2, x_3) vyvážená, tedy $x_i < \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, 3$, musí nutně platit $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ (neboť tato cifra odpovídá v každém z rozvoju mocnině $2^{-1} = \frac{1}{2}$). Není-li vyvážená, pak u čísla většího než 0,5 je za desetinnou čárkou číslice 1. Nyní určíme, jak se změní dvojkové zápisy (1) po provedení vyvažovací operace V . Protože cifry v zápisech daných čísel (1) odpovídají mocninám $2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, \dots$, je zřejmé, že násobení daného čísla dvěma vede k posunutí desetinné čárky o jedno místo doprava. V případě, že je číslo menší než $\frac{1}{2}$, zůstává u něj před desetinnou čárkou číslice 0. Je-li číslo větší než $\frac{1}{2}$ a menší než 1 (podle zadání), pak se objeví po vynásobení dvěma před desetinnou čárkou číslice 1. Podle definice vyvažovací operace V se však v tomto případě číslo 1 odečítá. Provedení vyvažovací operace tedy u všech čísel dané trojice (1) znamená posunutí desetinné čárky o jedno místo doprava a nahrazení číslice 1 před desetinnou čárkou číslicí 0. Platí tedy:

$$y_1 = 0, a_2 a_3 a_4 \dots, y_2 = 0, b_2 b_3 b_4 \dots, x_3 = 0, c_2 c_3 c_4 \dots$$

Postupné provádění operace V pak znamená postupné posouvání desetinné čárky doprava. Problém se nyní redukuje na zjištění, zda po konečném počtu vyvažovacích operací musí nastat případ, kdy všechna čísla ve trojici budou mít současně první číslici za desetinnou čárkou rovnu nule. Ukážeme na příkladu, že tato situace vždy nastat nemusí. Pro další úvahy je nutno si uvědomit, že vzhledem k zadání (všechna čísla jsou kladná iracionální) musí být rozvoje daných čísel v původní trojici (1) nekonečné a neperiodické. Pro konstrukci protipříkladu ukazujícího možnou nekonečnost procesu vyvažování využijeme podmínku $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Součet jedna lze dosáhnout např. tak, že ve vyjádření (1) musí být pro každý index $i \in \mathbb{N}$ právě jedno z čísel a_i, b_i, c_i rovno 1 a zbylé dvě rovny 0. Po rozvinutí součtu $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ve dvojkové soustavě dostaneme za těchto podmínek číslo $0, \overline{1} = 0,1111\dots$, které je v desítkové soustavě rovno jedné. Příklad výchozí trojice čísel (1) lze zvolit např. takto: Nechť $a_i = 1$, právě když číslo i je liché prvočíslo, v ostatních případech nechť $a_i = 0$. Nechť dále číslo $b_i = 1$, právě když číslo $i - 1$ je liché prvočíslo, v ostatních případech nechť $b_i = 0$. Nakonec nechť $c_i = 1$, právě když $a_i + b_i = 0$, v ostatních případech nechť $c_i = 0$. Žádná dvě lichá prvočísla nenásledují v řetězci přirozených čísel bezprostředně po sobě, proto nikdy

nemohou být čísla a_i , b_i pro žádný přirozený index i současně rovna jedné. Protože prvočísel je nekonečně mnoho a jejich rozložení v řadě přirozených čísel je zcela nepravidelné, nemůže být při dané volbě indexů žádný z rozvojų ve vyjádření (1) periodický. Výchozí trojici čísel volíme tedy takto:

$$x_1 = 0,0010101000101000101000100000101000001000\dots,$$

$$x_2 = 0,0001010100010100010100010000010100000100\dots,$$

$$x_3 = 0,1100000011000011000011001111000011110011\dots.$$

Z provedených úvah plyne, že tato trojice čísel není vyvážená a proces vyvažování prováděný postupnými iteracemi operace V nikdy nemůže skončit vyváženou trojicí, neboť při postupném posouvání desetinné čárky o jedno místo doprava vždy bude právě jedno z čísel mít hned za desetinnou čárkou číslici jedna, a tedy bude větší než $\frac{1}{2}$.

3. Josephusův problém

Obecná formulace: Necht' $k, n \in \mathbb{N}$, $2 \leq k \leq n$. Čísla $1, \dots, n$ rozmístíme v přirozeném uspořádání po obvodu kruhu (např. proti směru hodinových ručiček). Prvních $k-1$ čísel ponecháme beze změny, pak odstraníme číslo k , dále postupně proti směru hodinových ručiček odebíráme každé k -té číslo z těch, která ještě zůstala. Proces odebírání čísel končí, jakmile na obvodu kruhu zůstane méně než k čísel. Označme $L(n, k)$ množinu těchto zbylých prvků. Problémem je určit výčetem nebo nějak charakterizovat prvky této množiny.

Poznamenejme, že pro $k = n$ je problém triviální; množina zbylých prvků $L(n, k)$ má vždy $k-1$ prvků.

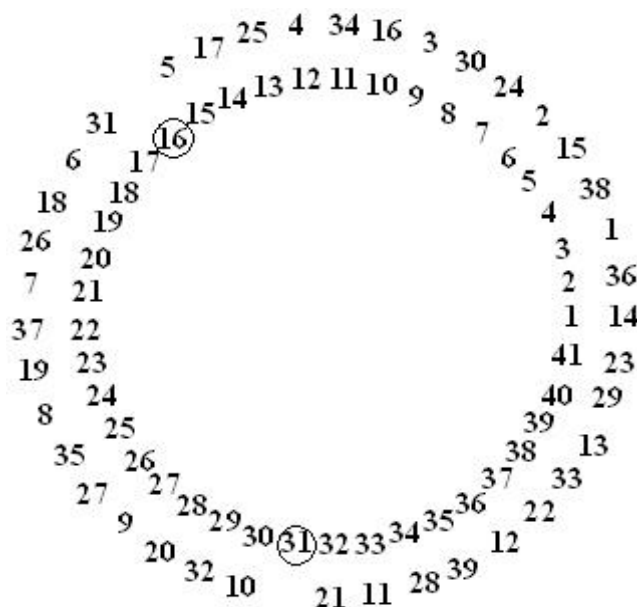
Nyní uvedeme historický úvod k problému (převzato z Pavlíková, 2012, str. 275).

Josephus Flavius, vlastním jménem Jóséf ben Mattatjáh, se narodil v roce 37 n. l. v Jeruzalémě. Pocházel z vysoce postavené rodiny. Již od raného mládí byl velmi vzdělaný, měl přehled o židovské, řecké i římské kultuře. Když vypuklo židovské protiřímské povstání v Galilei, byl jmenován jedním z hlavních velitelů. Proti přesile, vedené vynikajícím římským vojevůdcem Vespasiánem, však Židé neměli nejmenší šanci. V červenci roku 67 n. l. byl Josephus spolu se čtyřiceti svými bojovníky obklíčen římskou armádou v úkrytu poblíž pevnosti Jotapata. Jeho vojáci se rozhodli vyhnout se zajetí tím, že si vezmou život. Josephus ovšem nesouhlasil a tak na jeho návrh losovali s tím, že další vylosovaný zabije předchozího vylosovaného, a tak budou postupovat tak dlouho, dokud nezůstane naživu jen poslední z nich, který spáchá sebevraždu. O samotném mechanismu losování nemáme podrobnější informace. Ve skutečnosti zůstal Josephus jako jeden ze dvou posledních naživu a svého přítele přemluvil, aby se společně vzdali Římanům. Zda jeho přežití bylo dílem štěstěny, projevem boží vůle nebo výsledkem jeho vychytralosti, dnes můžeme pouze spekulovat.

Pravděpodobně první, kdo popis losování mezi Josephem a jeho muži okořenil legendou o rozestavení 41 mužů do kruhu a jejich postupnou eliminací, byl Girolamo Cardano (1501–1576). V jeho spise *Practica arithmetice et mensurandi singularis* z roku 1539. Za jeden z prvních pokusů o ryze matematický náhled do problematiky rozpočítávacích úloh lze označit práci Leonharda Eulera (1707–1783) z roku 1776 (Euler, 1776).

Formulace Josephusova problému z matematického hlediska podle jednoho z internetových zdrojů je následující (Weisstein, 2017). Josephus byl společně se svými 40 spolubojovníky uvězněn v jeskyni a obklíčen římským vojskem. Raději než zajetí se rozhodli volit dobrovolnou sebevraždu, přičemž postup svého sebezničení provedli v pořadí, které Josephus navrhnul. Všichni se postavili na obvod kruhu a očíslovali se čísla od 1 do 41. Každý

třetí potom vždy postupně volil smrt. Bojovníci ovšem netušili, že Josephus se svým nejvěrnějším přítelem zaujali taková dvě místa v kruhu bojovníků, aby nakonec zůstali živí právě jen sami dva. Jim se nakonec po jejich přidání k Římanům podařilo zachránit. V řeči matematiky se jedná o výše popsany problém pro výchozí hodnoty $n = 41$, $k = 3$. Postup sebevražd bojovníků a umístění Josephuse a jeho přítele ukazuje následující obrázek 1 (Weisstein, 2017).



Obrázek 1. Josephusův problém pro $n = 41$, $k = 3$

Na vnitřní kružnici je zobrazeno původní rozmístění čísel od 1 do 41, čísla na vnější kružnici vyjadřují, kolikátý v pořadí bude takto očíslovaný bojovník odstraněn. Zakroužkovaná čísla 16 a 31 na vnitřní kružnici po odebrání všech ostatních zůstanou (označují pozice Josephuse a jeho přítele).

Nyní se budeme věnovat řešení popsaného problému. Protože pro $k > 2$ je řešení poměrně složité a při určování $L(n, k)$ se využívá komplikovaných rekurentních vztahů (Pavlíková 2012), omezíme se s ohledem na didaktický účel tohoto příspěvku na případ pro $k = 2$. Z obecné formulace plyne, že na kruhu v tomto případě zůstane nakonec jediný prvek. Z didaktických důvodů uvedeme nyní upravenou formulaci problému.

Zadání problému: Čísla $1, 2, \dots, n$ rozmístíme v přirozeném uspořádání po obvodu kruhu (proti směru pohybu hodinových ručiček). Potom odstraníme číslo 2 a postupně proti směru pohybu hodinových ručiček odebíráme každé druhé číslo z těch, která ještě zůstala. Nechť $f(n)$ označuje poslední číslo, které zůstane na kružnici. Nalezněte funkční předpis pro hodnotu $f(n)$.

Nyní se tedy budeme zabývat nalezením vztahu pro přímý výpočet hodnoty $f(n)$, viz např. (Pavlíková 2012), (Weisstein, 2017). Využijeme induktivní postup. Hodnoty $f(n)$ pro několik prvních hodnot n jsou uvedeny v tabulce 1:

Tabulka 1: Hodnoty $f(n)$ pro $n = 1, \dots, 16$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

Z tabulky lze usoudit na fakt, že hodnota $f(n)$ je rovna jedné, právě když n je mocninou čísla dvě. Přijmeme-li tento fakt za „pracovní hypotézu“, je možno v tabulce pozorovat další zákonitost. Je zřejmé, že pro každé přirozené číslo n je jednoznačně určena dvojice nezáporných celých čísel m, k s vlastností $n = 2^m + k$, přičemž současně $0 \leq k < 2^m$. Vyjádříme-li takto přirozené číslo n našeho problému, potom pro hodnotu $f(n)$ platí vztah

$$f(n) = 2k + 1. \quad (2)$$

Vztah (2) lze dokázat matematickou indukcí, viz např. (Pavlíková 2012), (Weisstein, 2017).

Další zajímavou otázkou nyní je, zda neexistuje vztah pro výpočet hodnoty $f(n)$ ve tvaru funkčního předpisu závisícího pouze na čísle n (vztah (2) vyžaduje vyjádření čísla n pomocí dalších proměnných). Tento problém již nesouvisí s původním problémem Flaviuse Josephuse, ale jedná se o problém teorie dělitelnosti, popř. teorie čísel. V literatuře, např. (Weisstein, 2017), lze nalézt řešení. Hledaný vzorec je tvaru

$$f(n) = 2n + 1 - 2^{1+[lg_2 n]} \quad (3)$$

kde $[lg_2 n]$ označuje celou část reálného čísla $lg_2 n$. Poznamenejme, že vztahy (2) a (3) jsou ekvivalentní a dávají pro všechna přirozená čísla n stejné hodnoty. Důkaz je velmi snadný; po dosazení do vztahu (3) platí:

$$f(n) = 2 \cdot (2^m + k) + 1 - 2^{1+[lg_2 n]} = 2^{(m+1)} + 2k + 1 - 2^{1+[lg_2 n]} = 2k + 1, \text{ neboť platí } [lg_2 n] = m.$$

Nyní již máme k dispozici funkční předpis (3), který určuje číslo, které zůstane po odstranění všech ostatních na obvodu kruhu. Jako zajímavou aplikaci uvedeme nyní dvojí možné vyjádření tohoto předpisu pro $f(n)$ s využitím dvojkové číselné soustavy (Larson, 1990). Opět s ohledem na účel příspěvku uvedeme pouze řešení, důkaz lze nalézt v literatuře (Larson, 1990). Důkaz je poměrně obtížný a zejména u budoucích učitelů 1. stupně ZŠ by mohl vyvolat i negativní vztah k matematice.

Jak tedy rychle určit číslo, které jako poslední z rozmístěných n čísel zůstane na kružnici? Stačí číslo n rozvinout ve dvojkové soustavě a každý koeficient nula v tomto vyjádření nahradit při výpočtu číslem -1 .

Např.:

$$\begin{aligned} f(17) &= f(10001)_2 = 16 - 8 - 4 - 2 + 1 = 3, \\ f(43) &= f(101011)_2 = 32 - 16 + 8 - 4 + 2 + 1 = 23. \end{aligned}$$

Hodnotu $f(43)$ ověříme i podle vztahu (3). Víme, že $[lg_2 43] = 5$, proto $f(43) = 86 + 1 - 64 = 23$. Čísla jsou z kruhu pro $n = 43$ odebrána v tomto pořadí: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 3, 11, 19, 27, 35, 43, 15, 31, 7, 39.

Vyjádření hodnoty $f(n)$ lze provést i jiným, velmi efektním způsobem. Číslo n vyjádříme ve dvojkové soustavě jako $n = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_2$. Hodnotu $f(n)$ lze pak určit velmi jednoduchým vyjádřením $f(n) = (a_{k-1} \dots a_1 a_0 a_k)_2$, tj. první číslici zleva v zápise čísla n přesuneme na poslední místo napravo a ostatní ponecháme beze změny. Podobně jako v desítkové soustavě „nuly zleva“ můžeme vynechat.

Např.:

$$\begin{aligned} f(17) &= f(10001)_2 = (00011)_2 = (11)_2 = 3, \\ f(43) &= f(101011)_2 = (10111)_2 = 23. \end{aligned}$$

Důkaz opět uvádět nebudeme, viz např. Pavlíková, 2012. Oba způsoby vyjádření $f(n)$ pomocí dvojkové číselné soustavy jsou ekvivalentní.

4. Závěr

V příspěvku jsme demonstrovali řešení dvou problémů. Jednak problému vyvážených trojic a jednak tzv. Josephusova problému, kde jsme pro $k = 2$ podali řešení, jak určit výslednou hodnotu $f(n)$. Oba tyto problémy, stejně jako mnoho podobných dalších, na které v příspěvku nezbylo místo, pocházejí ze zahraniční matematické soutěže Putnam Exam. I z toho je vidět, že vhodnost zadávání takovýchto problémů studentům je nesporná. I když studenti nenaleznou úplné řešení problému samostatně, myšlenkové postupy při zkoumání značným způsobem rozvíjejí jejich matematické schopnosti. Současně si uvědomují různé souvislosti, kdy při řešení jednoho problému vyvstane nutnost řešit problém jiný. Při řešení Josephusova problému pro hodnoty $k = 2$ jsme např. upozornili na problémy ekvivalentnosti různých vyjádření hodnoty $f(n)$. Obtížným problémem, zasahujícím i do oblasti výpočetní techniky, je řešení Josephusova problému pro $k > 2$.

Literatura

- Bělík, M. (1999). *Poziční číselné soustavy*. Ústí nad Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně.
- Euler, L. (1776). *Observationes circa novum et singulare progressionem genus*. Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitane 20 (1776), 123–139.
- Hejný, M. a kol. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.
- Jelínek, M. (1974). *Numeriční soustavy*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.
- Larson, L. C. (1990). *Metódy riešenia matematických problémov*. Bratislava: Alfa.
- Pavlíková, P. (2012). O Josephově problému. *Pokroky matematiky, fyziky & astronomie*, 57(4), 274–284.
- Weisstein, E. W. (2017). *Josephus Problem*. From MathWorld, A Wolfram Web Resource. Dostupné z <http://mathworld.wolfram.com/JosephusProblem.html>.