

Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics

The Union of Czech Mathematicians and Physicists, Olomouc branch



Elementary Mathematics Education Journal

2025

EME

Elementary Mathematics Education
Journal

Vol. 7

No. 1



Olomouc 2025

ISSN 2694-8133

Univerzita Palackého v Olomouci

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

ve spolupráci s

Jednotou českých matematiků a fyziků

pobočný spolek Olomouc

Elementary Mathematics Education Journal

ročník 7, číslo 1

2025

Palacký University Olomouc
Faculty of Education
Department of Mathematics

in cooperation with

The Union of Czech Mathematicians and Physicists
Olomouc branch

Elementary Mathematics Education Journal

Vol. 7, No. 1

2025

Elementary Mathematics Education Journal

<http://emejournal.upol.cz>

Vydavatel: Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky
Žižkovo nám. 5, 77900 Olomouc, Česká republika

Předseda redakční rady: David Nocar (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika)

Redakční rada: Daniela Bímová (Technická univerzita v Liberci, Česká republika), Csaba Csíkos (Eötvös Loránd Tudományegyetem, Maďarsko), Radka Dofková (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika), Ján Gunčaga (Univerzita Komenského v Bratislave, Slovensko), Pavol Hanzel (Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, Slovensko), Vlastimil Chytrý (Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem, Česká republika), Michaela Kaslová (Univerzita Karlova, Česká republika), Eszter Herendiné Kónya (Debreceni Egyetem, Maďarsko), Janka Kopáčová (Katolícka univerzita v Ružomberku, Slovensko), Radek Krpec (Ostravská univerzita, Česká republika), Josef Molnár (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika & Jednota českých matematiků a fyziků, pobočný spolek Olomouc), David Nocar (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika), Bohumil Novák (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika), Eva Nováková (Masarykova Univerzita, Česká republika), Edita Partová (Univerzita Komenského v Bratislave, Slovensko), Šárka Pěchoučková (Západočeská univerzita v Plzni, Česká republika), Milan Pokorný (Trnavská univerzita v Trnave, Slovensko), Alena Prídavková (Prešovská univerzita v Prešove, Slovensko), Jana Příhonská (Technická univerzita v Liberci, Česká republika), Grażyna Rygał (Uniwersytet Humanistyczno-Przyrodniczy im. Jana Długosza w Częstochowie, Polsko), Libuše Samková (Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Česká republika), Iveta Scholtzová (Prešovská univerzita v Prešove, Slovensko), Ewa Swoboda (Państwowa Wyższa Szkoła Techniczno-Ekonomiczna w Jarosławiu im. ks. Bronisława Markiewicza, Polsko), Ilona Olahne Teglas (Eszterházy Károly Egyetem, Maďarsko), Martina Uhlířová (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika), Patrik Voštinár (Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, Slovensko), Katarína Žilková (Univerzita Komenského v Bratislave, Slovensko)

Redakce:

David Nocar (výkonný redaktor, editor), Radka Dofková (redaktor – editor), Martina Uhlířová (redaktor – příjem článků), Květoslav Bártek (redaktor – web administrátor)

Adresa a kontakty:

Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci
Žižkovo nám. 5, 77900 Olomouc, Česká republika
emej@upol.cz

Informace pro autory:

Časopis uveřejňuje články k aktuálním problémům z teorie elementární matematiky, o inovacích, trendech a výzkumech v primárním a preprimárním matematickém vzdělávání. Jednotlivé články jsou anonymně posuzovány dvěma odborníky v recenzním řízení typu „double-blind peer review“. Další informace a podrobné pokyny pro autory jsou k dispozici na webu: <http://emejournal.upol.cz>.

Za kvalitu obrázků, jazykovou správnost, dodržení bibliografické normy a dodržování publikační etiky odpovídají autoři jednotlivých článků.

Časopis vychází dvakrát ročně.

Ročník 7, číslo 1

Eds. © David Nocar, Radka Dofková, 2025

© Univerzita Palackého v Olomouci, 2025

ISSN 2694-8133

Elementary Mathematics Education Journal

<http://emejournal.upol.cz>

Publisher: Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics
Žižkovo nám. 5, 77900 Olomouc, Czech Republic

Editor-in-chief: David Nocar (Palacký University Olomouc, Czech Republic)

Editorial Board: Daniela Bímová (Technical University of Liberec, Czech Republic), Csaba Csíkos (Eötvös Loránd University, Hungary), Radka Dofková (Palacký University Olomouc, Czech Republic), Ján Gunčaga (Comenius University in Bratislava, Slovakia), Pavol Hanzel (Matej Bel University, Slovakia), Vlastimil Chytrý (Jan Evangelista Purkyně University in Ústí nad Labem, Czech Republic), Michaela Kaslová (Charles University, Czech Republic), Eszter Herendiné Kónya (University of Debrecen, Hungary), Janka Kopáčová (Catholic University in Ružomberok, Slovakia), Radek Krpec (University of Ostrava, Czech Republic), Josef Molnár (Palacký University Olomouc, Czech Republic & The Union of Czech Mathematicians and Physicists, Olomouc branch), David Nocar (Palacký University Olomouc, Czech Republic), Bohumil Novák (Palacký University Olomouc, Czech Republic), Eva Nováková (Masaryk University, Czech Republic), Edita Partová (Comenius University in Bratislava, Slovakia), Šárka Pěchoučková (University of West Bohemia, Czech Republic), Milan Pokorný (Trnava University, Slovakia), Alena Prídavková (University of Prešov, Slovakia), Jana Příhonská (Technical University of Liberec, Czech Republic), Grażyna Rygał (Jan Długosz University in Czeszochowa, Poland), Libuše Samková (University of South Bohemia in České Budějovice, Czech Republic), Iveta Scholtzová (University of Prešov, Slovakia), Ewa Swoboda (State Higher School of Technology and Economics in Jarosław, Poland), Ilona Olahne Teglas (Eszterhazy Karoly University, Hungary), Martina Uhlířová (Palacký University Olomouc, Czech Republic), Patrik Voštinár (Matej Bel University, Slovakia), Katarína Žilková (Comenius University in Bratislava, Slovakia)

Redaction:

David Nocar (executive redactor, editor), Radka Dofková (redactor – editor), Martina Uhlířová (redactor – receiving articles), Květoslav Bártek (redactor – web administrator)

Address and contacts:

Department of Mathematics, Faculty of Education, Palacký University Olomouc
Žižkovo nám. 5, 77900 Olomouc, Czech Republic
emej@upol.cz

Information for authors:

The journal publishes articles on current issues in the theory of elementary mathematics, about innovation, trends and research in primary and pre-primary mathematics education. Each article is reviewed by two anonymous experts (“double-blind peer review”). More information and other instructions for authors are available at: <http://emejournal.upol.cz>.

The authors of the articles are responsible for the quality of the images, language accuracy, compliance with bibliographic standards and adherence to publication ethics.

The journal is published twice a year.

Vol. 7, No. 1

Eds. © David Nocar, Radka Dofková, 2025

© Palacký University Olomouc, 2025

ISSN 2694-8133

Obsah

Jakub LIPTÁK: <i>Analýza návrhov využitia aplikácie MathKS študentmi predškolskej a elementárnej pedagogiky</i>	7
Emmanuel AMOAH: <i>Improving conceptual understanding in geometry through multimedia instruction: Evidence from a quasi-experimental study</i>	16
Jaroslav BERÁNEK: <i>Teorie čísel v problémové výuce</i>	24
Jitka PANÁČOVÁ: <i>Odborná příprava budoucích učitelů matematiky na 1. stupni ZŠ</i>	30
Václav TVARŮŽKA, Barbora TŘÍSKALOVÁ, Ladislav RUDOLF, Tomáš BAROT: <i>Development of fine motor skills in primary school students through Hejny method in teaching mathematics</i>	40
Slaviša JENJIĆ, Andrea ĐUKIĆ: <i>The relationship between elementary school student's age and interest in learning mathematics content</i>	45
Ana HENRIQUES: <i>The necessary contribution of using interdisciplinarity in initial training of mathematics future teachers to promote knowledge and integration of pedagogical perspectives to be used perceptions for the required students learning</i>	52
Jana HNATOVÁ: <i>Statický a dynamický přístup k zápisu čísla a jeho prevodom medzi číselnými pozičnými sústavami</i>	61
Dominika KUŠNÍROVÁ, Iveta SCHOLTZOVÁ: <i>The first view at mathematical EduLARP in primary education in context of contextual teaching and learning approach</i>	72
Alena PRÍDAVKOVÁ: <i>Matematická kompetencia a jej rozvoj u študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie využitím technológie rozšírenej reality</i>	81
Salvador Magno XIMENES: <i>Artificial intelligence in mathematics education: A systematic review of opportunities, challenges and pedagogical implications</i>	93

Content

Jakub LIPTÁK: <i>Analysis of educational proposals for the MathKS App by preschool and elementary school preservice teachers</i>	7
Emmanuel AMOAH: <i>Improving conceptual understanding in geometry through multimedia instruction: Evidence from a quasi-experimental study</i>	16
Jaroslav BERÁNEK: <i>Numbers theory in problems teaching</i>	24
Jitka PANÁČOVÁ: <i>Professional training of future mathematics teachers at primary school</i>	30
Václav TVARŮŽKA, Barbora TRÍSKALOVÁ, Ladislav RUDOLF, Tomáš BAROT: <i>Development of fine motor skills in primary school students through Hejny method in teaching mathematics</i>	40
Slaviša JENJIĆ, Andrea ĐUKIĆ: <i>The relationship between elementary school student's age and interest in learning mathematics content</i>	45
Ana HENRIQUES: <i>The necessary contribution of using interdisciplinarity in initial training of mathematics future teachers to promote knowledge and integration of pedagogical perspectives to be used perceptions for the required students learning</i>	52
Jana HNATOVÁ: <i>A static and dynamic view on number representation and its conversion between positional numeral systems</i>	61
Dominika KUŠNÍROVÁ, Iveta SCHOLTZOVÁ: <i>The first view at mathematical EduLARP in primary education in context of contextual teaching and learning approach</i>	72
Alena PRÍDAVKOVÁ: <i>Mathematical competence and its development within students enrolled in teaching in primary education programme using augmented reality technology</i>	81
Salvador Magno XIMENES: <i>Artificial intelligence in mathematics education: A systematic review of opportunities, challenges and pedagogical implications</i>	93

ANALÝZA NÁVRHOV VYUŽITIA APLIKÁCIE MATHKS ŠTUDENTMI PREDŠKOLSKÉJ A ELEMENTÁRNEJ PEDAGOGIKY

Jakub LIPTÁK

Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (Slovenská republika)

jakub.liptak@unipo.sk

Abstrakt

Tento príspevok dokumentuje prvotnú skúsenosť študentov predškolskej a elementárnej pedagogiky – budúcich učiteľov – s technológiou rozšírenej reality (AR) v rámci matematickej edukácie. Štúdia je kvalitatívneho charakteru, pričom analyzuje študentské návrhy aktivít využívajúce *MathKS*, čo je aplikácia podporujúca rozšírenú realitu. Jednotlivé návrhy sú následne prezentované v podobe niekoľkých kategórií, a to v zmysle zamerania vytvorených aktivít. Výsledky štúdie poukazujú, okrem iného, na potrebu častejšieho zaradzovania AR technológie do pregraduálnej prípravy učiteľov, so zámerom zdokonalenia ich pedagogických a technických znalostí týkajúcich sa AR technológie a jej využitia v matematickej edukácii.

Kľúčové slová: rozšírená realita, príprava učiteľov, matematická edukácia

ANALYSIS OF EDUCATIONAL PROPOSALS FOR THE MATHKS APP BY PRESCHOOL AND ELEMENTARY SCHOOL PRESERVICE TEACHERS

Abstract

This paper documents the initial experience of preschool and elementary pedagogy students – future teachers – with augmented reality (AR) technology in mathematics education. The study is of a qualitative nature, analysing students' proposals for activities using *MathKS* – an application supporting augmented reality. Individual proposals are subsequently presented in the form of several categories in terms of the focus of the created activities. The results of the study show, among other things, the need for more frequent inclusion of AR technology in the undergraduate training of teachers, with the aim of improving their pedagogical and technological knowledge regarding AR technology and its use in mathematics education.

Keywords: augmented reality, teacher training, mathematics education

1. Úvod

Technológia rozšírenej reality (AR) patrí v súčasnosti medzi najpopulárnejšie technológie v matematickej edukácii (Ahmad et al., 2020; Saundarajan et al., 2020; Jabar et al., 2022; Bulut & Ferri, 2023). Vplyvom rozšírenej reality dochádza v edukácii k obohateniu zmyslového vnímania účastníka procesu prostredníctvom virtuálneho kontextu. Samotná technológia je pritom založená na súčinnosti viacerých hardvérových a softvérových komponentov. Z pohľadu používaných technických zariadení možno rozlíšiť dva základné typy AR, a to *tablet-based AR* a *wearable AR*. Spustenie samotného rozšírenia je pritom založené na určitom podnete, na základe ktorého možno technológiu AR členiť na *marker-based AR*, *markerless AR*, *superimposition-based AR* a *SLAM-based AR* (Hnatová, et al. 2024).

V rámci matematickej edukácie je možné využívať ktorýkoľvek typ AR technológie, nakoľko jej samotné využitie sa môže týkať rozličných edukačných zámerov.

Rozšírená realita sa za posledných niekoľko rokov stala záujmom mnohých štúdií a prác v oblasti matematickej edukácie pre predprimárny a primárny stupeň vzdelávania v stredoeurópskom aj celosvetovom priestore. Jednotlivé štúdie pritom poukázali na využitie rozšírenej reality v rámci rozličných matematických tém, ale aj vplyv rozšírenej reality na psychológiu učenia sa, napríklad v oblasti motivácie žiakov k učeniu sa (Demitriadou et al., 2019; Yousef, 2020; Amir et al., 2020). AR technológia pritom môže mať pozitívny vplyv na učebné výsledky žiakov (Masneri et al., 2022; Bulut & Ferri, 2023).

Rozšírená realita je uplatniteľná v rozličných matematických oblastiach. Prídavková (2023) prezentovala možnosť využitia rozšírenej reality pre účely modelovania zápisu prirodzeného čísla. Okrem vytvárania predstáv o pozičnej sústave však možno AR technológiu využiť aj pri operáciách s číslami (Ivonne et al., 2020), či dokonca riešení rovníc (Mokriš et al., 2023). V spojení s aritmetikou, avšak presahujúco aj do iných oblastí bolo poukázané na možnosti využitia AR technológie pri tvorbe a riešení slovných úloh (Hnatová, 2023).

Asi však najfrekvencovanejšie využitie AR technológie v rámci matematických tém, na základe datovaných výskumov, má oblasť geometrie (Hnatová et al., 2024). V geometrii ju pritom možno využiť na rozpoznávanie geometrických útvarov (Gecu-Parmaksiz & Delialioglu, 2019). Prídavková (2022) poukázala na využitie rozšírenej reality pri tvorbe úloh zameraných na tému súmernosť v rovine. Pri vytváraní edukačných materiálov v spojení s AR technológiu protom možno využiť dostupné softvéry, ako napríklad GeoGebra. Mokriš et al. (2024) načrtnol možnosti vytvárania priestorových geometrických útvarov a ich vizualizáciu pomocou programu Geogebra. Wossala (2023) okrem samotných priestorových útvarov upozorňuje na možnosť vizualizácie ich sietí.

AR technológia má svoje uplatnenie aj vo voľnočasových aktivitách matematického charakteru. Lipták (2024) sumarizoval doterajšie výskumné práce zamerané na využitie technológie rozšírenej reality v oblasti mimoškolskej, resp. rekreačnej matematiky, kde najčastejšie sa vyskytujúcou oblasťou boli hry a úlohy v štvorcovej sieti, kartové a stolové hry, a geometrické skladačky. Koreňová et al. (2023) dodáva, že AR technológia je perspektívnym nástrojom edukácie v školskom klube detí. V nadväznosti na to Hnatová (2024a) poukazuje na možnosť využitia AR technológie vo formy didaktickej hry. Iným vhodným materiálom pre edukačné aktivity počas ale aj mimo vyučovania sú kocky a s nimi súvisiace aktivity, pričom AR technológiu možno v spojení s touto oblasťou využiť mnohými spôsobmi (Hnatová, 2024c; Hnatová, 2024d).

V rámci prezentovanej štúdie sú objektom záujmu budúci učitelia predprimárneho a primárneho stupňa vzdelávania v roli tvorcov edukačných aktivít s využitím aplikácie využívajúcej projekciu kockových štruktúr.

2. Metódy

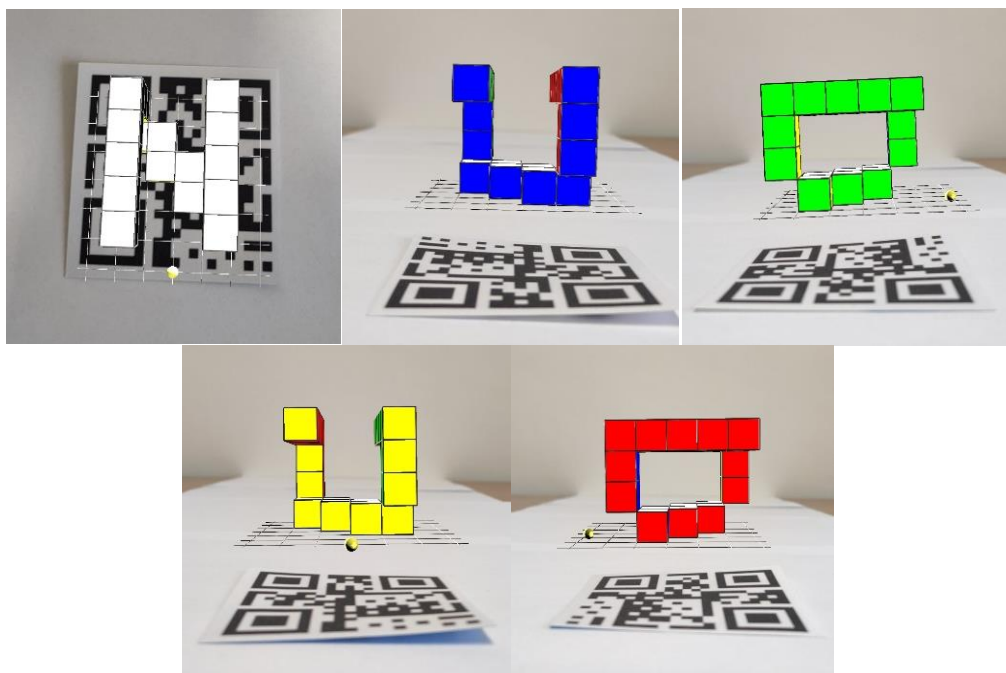
Cieľom tejto štúdie je identifikovať návrhy edukačných aktivít študentov predškolskej a elementárnej pedagogiky s využitím aplikácie *MathKS* vizualizujúcej kockové stavby pomocou rozšírenej reality. Následne je zámerom navrhnuté aktivity kvalitatívne analyzovať a vyvodiť závery pre prípravu budúcich učiteľov predškolského a primárneho stupňa v spojení s využívaním rozšírenej reality pre účely matematickej edukácie. Výskumnou otázkou je teda: *Aké sú primárne návrhy edukačných aktivít študentov predškolskej a elementárnej pedagogiky využívajúce AR technológiu v prostredí aplikácie MathKS?*

2.1. Participanti

Štúdie sa celkovo zúčastnilo 153 študentov predškolskej a elementárnej pedagogiky v druhom ročníku bakalárskeho štúdia na jednej univerzite na Slovensku. Vek participantov sa pohyboval v rozmedzí 20–22 rokov, pričom dostupným výberom získaná vzorka mala rýdzo ženské zastúpenie. Nikto z participantov nemal dovtedy skúsenosť s technológiou rozšírenej reality; participantí dokonca nevedeli čo je rozšírená realita.

2.2. Použité nástroje

V rámci štúdie bola použitá aplikácia *MathKS* zobrazujúca kockové štruktúry prostredníctvom technológie rozšírenej reality. Uvedená aplikácia je kompatibilná so systémom Android. Ide o marker-based aplikáciu, teda na vizualizáciu rozšírenej reality v podobe kockovej stavby je v tomto prípade použitý QR kód. QR kódu je jednoznačne priradená stavba, ktorá je načítaná z vytvorenej databázy. Aplikácia umožňuje individuálne zobrazenie celkovo 52 rozličných kockových štruktúr. Vyobrazenú kockovú štruktúru možno pozorovať z jednotlivých strán (pôdorys a 4 bokorysy), pričom každý z pohľadov je farebne rozlíšený. Navyše, každý z pohľadov je vyobrazením určitého tlačeneho písmena latinského písma. Orientácia daných písmen sa môže líšiť od klasického zápisu (pozri Obrázok 1). Každá z týchto kockových stavieb takto zobrazí tri odlišné písmená (v tomto prípade sú to písmená N - biele, U – modré a žlté, D – zelené a červené).



Obrázok 1. Jednotlivé pohľady na kockovú stavbu v rozšírenej realite

2.3. Priebeh

So skupinami participantov bolo organizované jednohodinové stretnutie, pričom participantí absolvovali stretnutie v skupinách o veľkosti 20-27 jedincov. Počas tohto stretnutia boli participantí oboznámení s aplikáciou *MathKS*. Participantom boli prezentované kockové stavby zobrazené prostredníctvom opísanej aplikácie na mobilnom zariadení, ktorého plocha bola zdieľaná so stolovým počítačom pomocou programu *TeamViewer* a projektovaná na bielom plátne. QR kód nasníмали tí participantí, ktorí o to prejavili záujem. Zvyšní participantí sledovali rozšírenú realitu na premietacom plátne. V priebehu snímania a projekcie digitálneho

vyobrazenia sa vyskytli technické problémy súvisiace s prerušením vizualizácie v dôsledku rýchlych pohybov so zariadením, alebo odklonením zariadenia od QR kódu. To však výrazným spôsobom neovplyvnilo zámer, ktorým bolo oboznámenie participantov s aplikáciou. Aby participantovi evidovali možnosť využitia danej aplikácie v edukačnej realite, zadali sme im úlohu identifikovať jednotlivé písmená a zapisovať ich. Následne bolo ich úlohou zostrojiť čo najviac plnovýznamových slov. Pri riešení úlohy pracovali v 5–8 členných skupinách. Po ukončení skupinovej práce a prezentácií jednotlivých riešení bola skupinám participantov zadaná nasledovná úloha: „Navrhnete edukačné aktivity pre deti mladšieho školského veku zamerané na oblasť matematiky, v ktorých bude dochádzať k používaniu aplikácie *MathKS*.“

Každá skupina mala na vypracovanie zadania dostatok času; vypracovanie odovzdávali keď sami uvážili jeho obsahovú saturáciu.

2.4. Analýza dát

Študentské návrhy aktivít zamerané na využívanie aplikácie *MathKS* v edukačnom procese boli podrobené obsahovej kvalitatívnej analýze. Celkovo bolo zozbieraných 26 vypracovaní, pričom niektoré vypracovania obsahovali aj viac návrhov edukačných aktivít. Tieto aktivity boli kódované na základe ich špecifického zamerania. V prípade výskytu podobne formulovaných aktivít boli tieto aktivity analyzované, no do ďalšej analýzy bola braná len jedna.

3. Výsledky

Na základe obsahovej analýzy návrhov aktivít/úloh sme vytvorili štyri kategórie návrhov:

- návrhy aktivít zamerané na precvičovanie matematických znalostí,
- návrhy aktivít bez spätosti so špecifickým edukačným obsahom,
- návrhy aktivít na oboznamovanie sa s rozšírenou realitou,
- návrhy aktivít bez jasného edukačného zámeru alebo problematické z hľadiska jednoznačnosti a korektnosti.

Tieto námety na aktivity uvádzame v nasledujúcej Tabuľke 1. až 4. Jednotlivé námety sú podporené našim komentárom, ktorého hlavnou úlohou je ozrejmiť navrhnutú aktivitu a uviesť ju do širšieho edukačného kontextu.

Tabuľka 1. Aktivity zamerané na oblasť matematiky

Popis navrhutej aktivity/úlohy	Komentár
Určiť počet štvorcov v jednotlivých písmenách (farieb).	Úloha je vhodná od najnižšieho stupňa matematického vzdelávania. V nadväznosti na túto úlohu možno formulovať pokyny zamerané napr. na porovnávanie a usporiadanie.
Usporiadať písmená (zostupne/vzostupne) podľa počtu štvorcov.	Úloha predpokladá určenie počtu štvorcov jednotlivých farieb. Tie je možné následne porovnávať a usporadúvať.
Určiť počet kociek v kockovej stavbe.	Žiaci určujú počet predmetov počítaním po jednom. Úloha pritom vyžaduje systematický postup riešenia. V opačnom prípade môže dôjsť k chybe kvôli viacnásobnému započítaniu kociek, resp. vynechaniu niektorých kociek.
Zoradiť QR kódy podľa počtu kociek v stavbách.	Žiaci najprv musia určiť počty kociek v jednotlivých stavbách a následne tieto hodnoty porovnať.

Určiť počet kociek potrebných na doplnenie stavby aby vznikla kocka/kváder.	Túto úlohu možno riešiť viacerými spôsobmi, na čo je potrebné v priebehu práce so žiakmi podotknúť. Typickými spôsobmi je dopočítavanie (dopĺňanie) kociek do stavby. Iným spôsobom je riešenie úlohy hľadaním rozdielu medzi počtom kociek stavby a počtom kociek, ktoré vytvoria „veľkú“ kocku. Úloha je vhodná pre oboznamovanie sa s vlastnosťami kocky.
QR kódy sú uložené vedľa seba (je nimi vyskladané slovo). Úlohou detí je „uhádnúť“ myslené slovo.	Riešenie tejto úlohy zahŕňa kombinovanie jednotlivých písmen, čo priamo súvisí s riešením kombinatorických úloh. V nadväznosti na túto úlohu možno formulovať problém: Koľko rôznych slov možno vytvoriť z daných možností?
Postaviť z reálnych kociek písmená na základe projektovaných modelov – diskusia o vlastnostiach kocky	Vytváranie písmen pomocou kociek môže byť aktivitou pre deti zoznamujúce sa s písmenami. Následne z toho možno vytvoriť úlohy zamerané na oblasť kombinatoriky, obsahu, objemu a pod.

Najfrekvencovanejšími námetmi na prácu s deťmi boli aktivity, kde hlavnou náplňou detí je určiť počet kociek, resp. štvorcov danej farby. Ide o očakávaný výsledok, nakoľko úlohy na určovanie počtu možno považovať za najjednoduchšie v zmysle vytvorenia samotnej úlohy. Ďalším námetom bolo dopĺňanie kociek do stavby. Nazdávame sa, že pri tomto návrhu boli účastníci ovplyvnení riešením podobnej úlohy v minulosti, avšak v podobe plánu stavby alebo 3D grafického náhľadu na stavbu z kociek.

Tabuľka 2. Námety pre nešpecifický edukačný obsah

Popis navrhnutej aktivity/úlohy	Komentár
Zadaním bude omaľovanka, ktorej jednotlivé sektory budú mať vpísané matematické príklady (napr. $3 \cdot 2 = \dots$). Okrem toho budú v zadaní písmená, ktoré budú priradené k číslam – výsledkom príkladov. Úlohou žiakov je: - vypočítať príklady a tým identifikovať priradené písmeno, - nasnímaním stavieb zistiť, aká farba prislúcha danému písmenu, - danou farbou vyfarbiť obrázok.	Táto a podobné aktivity by využívali prezentovanú aplikáciu v zmysle referencie na farbu alebo nejakú inú vlastnosť späť s vyobrazenými stavbami a písmenami. Takýmto spôsobom by mohla byť aplikácia využitá v rámci série úloh, ktoré vzájomne odkazujú na seba.
Deti riešia matematické úlohy s výberom možností. Po vyriešení úlohy a nasnímaní QR kódu, ktorý sa nachádza pri zadaní úlohy si deti overia správnosť odpovede (napr. správna je odpoveď A vtedy, ak jedným z písmen v kockovej stavbe je písmeno A).	Tento návrh má všeobecnú platnosť z pohľadu obsahu vyučovania. V prípade matematiky, teoreticky, by správnosť číselnej odpovede matematickej úlohy mohla byť overená napr. určením počtu, rozdielu, podielu alebo súčinu konkrétnych kociek stavby.

V prípade prvého návrhu sa študenti pravdepodobne nechali inšpirovať úlohami z pracovných zošitov pre primárne vzdelávanie. Druhý návrh pôvodne nie je viazaný na matematický obsah, a jeho násilné spájanie s matematikou sa nejaví byť vhodnou cestou. Napriek tomu je možné nájsť určité prieniky.

Tabuľka 3. Aktivity na oboznamovanie sa s rozšírenou realitou

Popis navrhutej aktivity/úlohy	Komentár
Zakresliť do štvorcovej siete jednotlivé pohľady na kockovú stavbu (jednotlivé písmená). Následne možno žiakom formulovať úlohy ako: • presuň štvorce tak, aby ti vzniklo iné písmeno, • urč počet štvorcov, ktoré potrebujeme pridať/odobrať, aby sme vytvorili iné písmeno.	Túto úlohu možno považovať za vhodnú pre oboznamovanie sa s písmenami. Diskutovanie počtu použitých štvorcov však môže prispieť k budovaniu predmatematickej gramotnosti.
Deti hľadajú konkrétne písmená v AR stavbách. Ak nájdu dané písmeno, spolu s ním si zapisujú všetky zvyšné písmená v stavbe.	Aktivita je zameraná na manipuláciu s AR technológiou a identifikovanie písmen abecedy.
Vypisovanie písmen a skladanie viet	Aktivita je zameraná na manipuláciu s AR technológiou a identifikovanie písmen abecedy. Potenciálne možno navrhnúť aktivitu na tvorbu písaného alebo hovoreného textu.
Po ukážke kockovej stavby žiakom sú im kladené otázky typu: Aké písmená tam boli? Aký bol počet kociek/štvorcov? Aké farby boli použité? ...	Touto aktivitou môže dochádzať k cvičeniu pracovnej pamäti.

Uvedené aktivity možno využiť či už v rámci vyučovania alebo voľnočasovej edukácie. Zameraním sa však vzdiaľujú od matematickej edukácie, resp. boli študentmi formulované aktivity nešpecifické pre matematické vzdelávanie.

Do poslednej kategórie (Tabuľka 4.) sme zaradili námety aktivít a úloh, z ktorých znenia nie je viditeľný prínos pre matematické vzdelávanie, resp. ktoré nemožno efektívne realizovať z dôvodu objektívnych obmedzení. Napriek tomu sme sa u niektorých námetov pokúsili nájsť určité prieniky s matematickou edukáciou.

Tabuľka 4. Nevhodné návrhy aktivít

Popis navrhutej aktivity/úlohy	Komentár
Na základe „digitálnej“ kockovej stavby postaviť reálnu stavbu z kociek.	V prípade nami prezentovanej aplikácie je vo väčšine prípadov nemožné postaviť reálnu stavbu kvôli typu stavby (pozri Obrázok 1). V prípade iných typov stavieb by však išlo o aktivitu vhodnú pre deti predprimárneho vzdelávania.
Usporiadať písmená/stavby podľa výšky, šírky	Nami prezentované stavby majú buď rovnaké rozmery alebo rozmery líšiac sa o jednu kocku. Na základe nízkej disperzie je tak nevhodné porovnávať jednotlivé rozmery.
V poradí ktoré je písmeno napr. „Z“?	Z tohto návrhu nie je zrejmý edukačný zámer. Teoreticky, písmená so stavieb možno priradiť k číslam (napr. nominálne na základe vzostupného poradia) a následne to využiť pre aktivity so šiframi.
Skladanie písmen zo zápaliek	Aktivita je bez konkrétneho cieľa. Teoreticky, spolu so skladaním písmen so zápaliek možno úlohu poňať divergentným spôsobom a prepojiť to s kombinatorikou.
Prepojenie písmen na rímske čísla – Ktoré písmená sú rímskymi číslicami?	Aj keď rímske čísla sú v kurikule matematického vzdelávania, nevidíme potenciál využitia prezentovanej aplikácie pre tento obsah.

Žiak má danú farebnú postupnosť. Jednotlivé stavby musí zoradiť do takejto postupnosti.	Každá stavba pozostáva z rovnakého spektra farieb, a preto napr. pre postupnosť štyroch farieb a daných štyroch stavbách existuje $4! = 24$ riešení. Úloha preto nie je problémom.
Na základe „digitálnej“ kockovej stavby vytvoriť plán stavby.	Keďže stavby v aplikácii neboli klasickými stavbami z kociek, vytvorený plán by bol nejednoznačný. V prípade jednoduchších stavieb by však išlo o vhodnú aktivitu pre žiakov predprimárneho a primárneho vzdelávania.

4. Záver

Prezentovaná štúdia poukazuje na niekoľko podstatných faktov. Prvým faktom je to, že technológia rozšírenej reality a jej didaktické využitie je pomerne málo známe budúcim učiteľom primárneho a predprimárneho stupňa vzdelávania, pričom k podobnému záveru dospela aj Hnatová (2024b). Tieto zistenia sa pritom týkajú znalostí študentov predprimárnej a elementárnej pedagogiky vo vzťahu s používaním digitálnych technológií vo všeobecnosti (Lipták, 2023).

Druhým faktom je to, že napriek limitovanej skúsenosti s technológiou rozšírenej reality boli budúci učitelia schopní navrhnúť rozmanité edukačné aktivity a úloh. Na druhej strane, nakoľko išlo o študentov druhého ročníka bakalárskeho štúdia, nižšia kvalita edukačných návrhov bola pravdepodobne spôsobená ich doposiaľ nedostatočnými didaktickými a odbornými znalosťami prislúchajúcimi učiteľovi matematiky primárneho stupňa vzdelávania. K podobným záverom dospela Hnatová (2024b), ktorá pri identifikácii úrovne edukačných návrhov s rozšírenou realitou pomocou modelu TIM dospela k tomu, že budúci učitelia predprimárneho a primárneho stupňa vzdelávania majú tendenciu vytvárať aktivity s jednoduchším spôsobom integrácie. Tento stav by bolo zaujímavé sledovať aj z dlhodobého hľadiska, resp. porovnať úroveň aktivít budúcich učiteľov v jednotlivých fázach ich pregraduálnej prípravy.

Na záver možno konštatovať, že prezentovaná aplikácia *MathKS* ponúka dostatok priestoru pre vytváranie edukačných aktivít, no jej efektívne využitie je závislé od didaktického a odborného majstrovstva daného učiteľa, čo taktiež nadväzuje na zistenia Mokriš et al. (2023). Pri práci s novým a pútavým edukačným nástrojom akým je prostredie rozšírenej reality môžu neskúsení učitelia, resp. budúci učitelia sklznúť od samotného matematického obsahu k povrchnej činnosti (Prídavková, 2023). Nakoľko sa ukázalo, že samostatná práca študentov – budúcich učiteľov – s digitálnymi technológiami nepoukazuje na ich znalostné prírastky (Prídavková, 2023; Nocar & Zdráhal, 2016), považujeme za potrebné zaradzovať efektívne digitálne nástroje do pregraduálnej prípravy učiteľov, pričom významnú časť by mala tvoriť činnosť spojená s týmito nástrojmi pod vedením erudovaných pedagógov. Na základe toho možno predpokladať zvýšenú pravdepodobnosť znalostných prírastkov u študentov. Aby sa však študenti dokázali aj samostatne vzdelávať v oblasti práce s AR technológiou, považujeme za potrebné učiteľom ponúknuť kvalitnú metodickú príručku, resp. učebnicu zameranú na pedagogickú činnosť s využitím AR technológie v matematickej edukácii.

Acknowledgements

Príspevok je čiastkovým výstupom grantového projektu *KEGA* č. 024PU-4/2024 *Technológia rozšírenej reality a jej inkorporácia do matematickej prípravy študentov v študijnom programe Predškolská a elementárna pedagogika*.

Literatúra

- Ahmad, N. I. N., & Junaini, S. N. (2020). Augmented Reality for Learning Mathematics: A Systematic Literature Review. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET)*, 15(16), 106–122. <https://doi.org/10.3991/ijet.v15i16.14961>
- Amir, M. F., Fediyanto, N., Rudyanto, H. E., Nur Afifah, D. S., & Tortop, H. S. (2020). Elementary students' perceptions of 3Dmetric: A cross-sectional study. *Heliyon*, 6(6), e04052. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2020.e04052>
- Bulut, M., & Borromeo Ferri, R. (2023). A systematic literature review on augmented reality in mathematics education. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 11(3), 556–572. <https://doi.org/10.30935/scimath/13124>
- Demitriadou, E., Stavroulia, K.-E., & Lanitis, A. (2020). Comparative evaluation of virtual and augmented reality for teaching mathematics in primary education. *Education and Information Technologies*, 25(1), 381–401. <https://doi.org/10.1007/s10639-019-09973-5>
- Gecu-Parmaksiz, Z., & Delialioglu, O. (2019). Augmented reality-based virtual manipulatives versus physical manipulatives for teaching geometric shapes to preschool children. *British Journal of Educational Technology*, 50(6), 3376–3390. <https://doi.org/10.1111/bjet.12740>
- Hnatová, J. (2023). Využitie technológie rozšírenej reality pri tvorbe a riešení slovnej úlohy z matematiky študentmi učiteľstva pre primárne vzdelávanie. *Elementary Mathematics Education Journal*, 5(1), 22–31. https://emejournal.upol.cz/Issues/Vol5No1/Vol5No1_Hnatova.pdf
- Hnatová, J., Prídavková, A., & Lipták, J. (2024). *Rozšírená realita v primárnej matematickej edukácii: analýza edukačných aktivít študentov – budúcich pedagógov*. Prešov: Prešovská univerzita v Prešove. Dostupné z: <https://www.pulib.sk/web/kniznica/elpub/dokument/Hnatova2>
- Hnatová, J. (2024a). Didaktická hra s podporou rozšírenej reality (AR). In: *Dva dny s didaktikou matematiky 2024* (39–46). Praha: PF UK. Dostupné z: <https://8d8f55af62.clvaw-cdnwnd.com/0023db53731df613e31376e312bef977/200000249-bd96bbd96d/DvaDny2024.pdf>
- Hnatová, J. (2024b). Edukačné aktivity využívajúce rozšírenú realitu pri rozlišovaní základných telies a ich vlastností v primárnej matematickej edukácii – prípadová štúdia. *Elementary Mathematics Education Journal*, 6(1), 24–36. Dostupné z: https://emejournal.upol.cz/Issues/Vol6No1/Vol6No1_Hnatova.pdf
- Hnatová, J. (2024c). Edukačná hra so stavbami z kociek v rozšírenej realite pre žiakov v 1. cykle ZŠ. In: T. Nestorenko, R. Bernátová, & D. Kalita (Eds.), *Edukacja i społeczeństwo IX*. (21–30). Katowice: Akademia Śląska. Dostupné z: <http://www.wydawnictwo.wst.pl/uploads/files/2583a312fe258bf61be2fbc498017f63.pdf>
- Hnatová, J. (2024d). Stavby z kociek v rozšírenej realite pre žiakov 1. a 2. cyklu ZŠ. In: *Dva dny s didaktikou matematiky 2024* (24–29). Bratislava: FMFI UK. Dostupné z: <https://fmph.uniba.sk/fileadmin/fmfi/microsites/kdmfi/odm/zbornik2024.pdf>
- Ivonne, H. P. A., Alberto, M. P. M., & Guadalupe, C. F. R. (2020). Augmented Reality Application for Teaching Basic Operations with Fractions of the Same Denominator. *Journal of Computer Science*, 16(7), 1042–1062. <https://doi.org/10.3844/jcssp.2020.1042.1062>
- Jabar, J. M., Hidayat, R., Samat, N. A., Rohizan, M. F. H., Rosdin, N. 'Ain, Salim, N., & Norazhar, S. A. (2022). Augmented Reality Learning in Mathematics Education: A

- Systematic Literature Review. *Journal of Higher Education Theory and Practice*, 22(15). <https://doi.org/10.33423/jhetp.v22i15.5570>
- Koreňová, L., Severini, E., & Cavojsky, I. (2023). The Use of Augmented Reality in the After School Club From the Point of View of Future Educators. In: *INTED2023 Proceedings*, 5254–5263. <https://doi.org/10.21125/inted.2023.1360>
- Lipták, J. (2023). Rozšírená realita vo voľnočasovej matematickej edukácii očami študentov predprimárnej a primárnej pedagogiky. *Elementary Mathematics Education Journal*, 5(2), 17–24. Dostupné z: https://emejournal.upol.cz/Issues/Vol5No2/Vol5No2_Liptak.pdf
- Lipták, J. (2024). Analýza možností implementácie rozšírenej reality do kurzu Rekreačná matematika. In: B. Hlebová & V. Piskura (Eds.), *Transformácia edukácie v predprimárnom, primárnom a špeciálnom vzdelávaní v 21. storočí* (418–426). Prešov: Prešovská univerzita v Prešove. Dostupné z: <https://www.pulib.sk/web/kniznica/elpub/dokument/Hlebova4>
- Masneri, S., Domínguez, A., Zorrilla, M., Larrañaga, M., & Arruarte, A. (2022). Interactive, Collaborative and Multi-user Augmented Reality Applications in Primary and Secondary Education. A Systematic Review. *JUCS - Journal of Universal Computer Science*, 28(6), Article 6. <https://doi.org/10.3897/jucs.76535>
- Mokriš, M., Šimčíková, E., & Tomková, B. (2023). Riešenie rovníc v príprave učiteľov elementaristov. *Elementary Mathematics Education Journal*, 5(2), 25–33. Dostupné z: https://emejournal.upol.cz/Issues/Vol5No2/Vol5No2_Mokris-Simcikova-Tomkova.pdf
- Mokriš, M., Šimčíková, E., & Tomková, B. (2024). Jednoduché priestorové geometrické útvary v prostredí technológie rozšírenej reality. In: B. Hlebová & V. Piskura (Eds.), *Transformácia edukácie v predprimárnom, primárnom a špeciálnom vzdelávaní v 21. storočí* (427–431). Prešov: Prešovská univerzita v Prešove. Dostupné z: <https://www.pulib.sk/web/kniznica/elpub/dokument/Hlebova4>
- Nocar, D., & Zdráhal, T. (2016). Efektivita softwaru dynamické geometrie při samostudiu na příkladě jednoho geometrického konceptu. *Trends in Education*, 9(1), 198–204. <https://doi.org/10.5507/tvv.2016.027>
- Prídavková, A. (2022). Technológia rozšírenej reality a rozvoj matematických schopností. *Elementary Mathematics Education Journal*, 4(1), 53–63. Dostupné z: https://emejournal.upol.cz/Issues/Vol4No1/Vol4No1_Pridavkova.pdf
- Prídavková, A. (2023). Analýza prác študentov v kontexte zaradenia technológie rozšírenej reality do matematickej edukácie. *Elementary Mathematics Education Journal*, 5(2), 53–66. Dostupné z: https://emejournal.upol.cz/Issues/Vol5No2/Vol5No2_Pridavkova.pdf
- Saundarajan, K., Osman, S., Kumar, J. A., Daud, M. F., Abu, M. S., & Pairan, M. R. (2020). Learning Algebra using Augmented Reality: A Preliminary Investigation on the Application of Photomath for Lower Secondary Education. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET)*, 15(16), Article 16. <https://doi.org/10.3991/ijet.v15i16.10540>
- Wossala, J. (2023). Zásada názornosti v matematice s využitím programu Geogebra. *Elementary Mathematics Education Journal*, 5(2), 77–86. Dostupné z: https://emejournal.upol.cz/Issues/Vol5No2/Vol5No2_Wossala.pdf
- Yousef, A. M. F. (2021). Augmented reality assisted learning achievement, motivation, and creativity for children of low-grade in primary school. *Journal of Computer Assisted Learning*, 37(4), 966–977. <https://doi.org/10.1111/jcal.12536>

IMPROVING CONCEPTUAL UNDERSTANDING IN GEOMETRY THROUGH MULTIMEDIA INSTRUCTION: EVIDENCE FROM A QUASI-EXPERIMENTAL STUDY

Emmanuel AMOAH

Catholic University of Ghana, Faculty of Computing, Engineering and Mathematical Sciences (Ghana)

emmanuel.amoah@cug.edu.gh

Abstract

This study evaluated the effectiveness of a computer-based educational package on improving pupils' understanding of geometry at Grade 8 students. A quasi-experimental design was employed, involving pre- and post-test assessments across experimental and control groups. Descriptive statistics indicated a substantial increase in mean scores from pre-test ($M = 3.69$, $SD = 2.96$) to post-test ($M = 7.75$, $SD = 1.77$). Normality testing using Shapiro-Wilk revealed significant deviations from a normal distribution ($p < .001$), warranting the use of both parametric and non-parametric analyses. A paired sample t-test showed a significant improvement in post-test scores ($t(149) = -21.21$, $p < .001$), a result confirmed by the Wilcoxon Signed-Rank Test ($Z = -10.98$, $p < .001$), demonstrating the robustness of the intervention's effect. However, independent t-test and Mann-Whitney U analyses showed no statistically significant difference between experimental and control group post-test scores. Despite this, the within-group comparison clearly highlighted the intervention's effectiveness. These findings underscore the potential of integrating computer-based instructional tools into the teaching of geometry to foster deeper understanding and learner engagement in junior high mathematics education.

Keywords: Geometry learning, computer-based instruction, educational intervention, mathematics achievement, quasi-experimental design

1. Introduction

Mathematics, often viewed as the foundation of scientific inquiry and technological progress, plays a critical role in both individual and national development (Chesimet et al., 2016; Kurumeh, 2006). As a discipline, it equips learners with the ability to engage in abstract thinking and problem-solving, making it indispensable to modern education. Iji (2007) emphasized that no nation aspiring for growth in science and technology can afford to overlook the importance of mathematics.

Despite its value, students frequently exhibit fear and aversion toward mathematics, leading to a lack of interest and consistently poor performance—particularly in topics like geometry and mensuration (Kurumeh, 2007). These concerns have been echoed in reports such as the West African Examinations Council (WAEC) Chief Examiner's Report, which highlights persistent low achievement levels and diminished student motivation in mathematics (Achor et al., 2015).

Geometry, a core strand of mathematics, is central to developing learners' critical thinking, problem-solving, and reasoning abilities (Pittalis & Christou, 2010). It bridges various mathematical domains and enhances visualization, conjecture, logical reasoning, and proof skills, especially among pre-service mathematics teachers (Dimla, 2018). Fujita and Jones

(2002) categorized geometric reasoning into three cognitive dimensions: visualization, construction, and deductive reasoning. However, the abstract nature of geometric concepts often presents challenges to learners, hindering the development of effective reasoning skills (Jones, 2002).

To mitigate these challenges, instructional tools and learning resources that present realistic and relatable problems can enhance students' engagement and comprehension (Komalasari, 2012). Learning materials that are well-structured and pedagogically sound not only improve classroom clarity but also foster positive learning experiences (Hasibuan et al., 2019). Multimedia learning packages, in particular, have been shown to increase achievement by making abstract concepts more accessible and engaging (Sawangsri, 2016). Supporting this, Smith and Jones (2015) reported significant improvements in students' mathematical performance when structured learning materials were utilized compared to traditional teaching approaches.

Given these insights, the present study aims to evaluate the effectiveness of a learning package specifically designed to support Grade 8 students' understanding of geometry. By addressing known barriers to engagement and comprehension, this study seeks to contribute to the development of more effective instructional practices in mathematics education.

2. Methodology

2.1. Research Design

This study employed a quasi-experimental research design using a pre-test and post-test control group model to examine the effectiveness of an educational computer package in improving the understanding of geometry among grade 8 pupils of Manyhia D/A in the Bono Region of Ghana. This design was chosen because it allows for comparison between groups while accounting for initial group equivalence through pre-testing, even though random assignment to groups was limited due to educational setting constraints.

2.2. Population and Sample

The target population comprised grade 8 pupils of Manyhia D/A in the Bono Region of Ghana. A total of 150 pupils participated in the study. Participants were selected using purposive sampling, ensuring that those selected had no prior exposure to the computer-based geometry content and had similar academic performance levels based on their previous mathematics results.

2.3. Grouping and Matching Procedure

The pupils were matched in pairs based on prior mathematics scores to ensure comparability in ability levels. Each pair was then randomly assigned to either the control group or the experimental group. The experimental group ($n = 103$) received geometry instruction using the educational computer package, which incorporated interactive geometric designs and visual illustrations. The control group ($n = 47$) received conventional classroom instruction using textbooks and chalkboard methods.

2.4. Research Instruments

The primary research instrument used was a geometry achievement test, developed by the researcher in consultation with mathematics educators and aligned with the Grade 8 mathematics curriculum. The test was composed of objective and structured questions designed to measure pupils' conceptual understanding of geometry. The same test was administered before (pre-test) and after (post-test) the intervention to both groups to track progress and learning gains.

2.5. Intervention Procedure

The intervention was carried out over a period of four weeks. During this period, both groups received the same geometry content. However, while the control group learned through traditional instruction, the experimental group was taught using the computer-based educational package. The package included dynamic visualizations and interactive tasks designed to enhance learners' spatial reasoning and understanding of geometrical concepts.

2.6. Data Collection Procedure

Pre-tests were administered to both groups at the beginning of the study to establish a baseline for comparison. Following the four-week instructional period, post-tests were administered to measure the learning outcomes of each group. All test scores were recorded and compiled for analysis.

2.7. Statistical Analysis

In order to evaluate the effectiveness of the educational computer package on improving grade 8 pupils' understanding of geometry, both parametric and non-parametric statistical tests were used. These tests assessed the difference between pre-test and post-test scores within and between groups.

2.7.1. Parametric Tests

2.7.1.1. Paired Samples t-test

This test was used to compare pre-test and post-test scores within the same group to determine whether there was a significant improvement in performance over time.

Hypotheses:

- **Null Hypothesis (H_0):** There is no significant difference between the pre-test and post-test scores.

$$H_0: \mu_d = 0 \text{ (No mean difference)}$$

- **Alternative Hypothesis (H_1):** There is a significant difference between the pre-test and post-test scores.

$$H_1: \mu_d \neq 0$$

Formula:

$$t = \frac{d}{S_d/\sqrt{n}}$$

Where:

- d = Mean of the differences between paired scores
- S_d = Standard deviation of the differences
- n = Number of pairs
- t = t-statistic

2.7.1.2. Independent Samples t-test

This test was applied to compare post-test scores between experimental and control groups.

Hypotheses:

- **Null Hypothesis (H_0):** There is no significant difference in post-test scores between the control and experimental groups.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

- **Alternative Hypothesis (H_1):** There is a significant difference in post-test scores between the two groups.

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

Formula:

$$t = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{S_d^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}, \quad S_d^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Where:

- X_1, X_2 = Means of group 1 and 2
- S_d^2 = Pooled variance
- n_1, n_2 = Sample sizes of the two groups

2.7.2. Non-Parametric Tests

Due to violations of normality assumptions (as shown in the Shapiro-Wilk and Kolmogorov-Smirnov tests), non-parametric tests were also used to validate findings from the parametric tests.

2.7.2.1. Wilcoxon Signed-Rank Test

Used to compare pre-test and post-test scores for the same group without assuming normal distribution.

Hypotheses:

- **H_0 :** The median difference between paired scores is zero.
- **H_1 :** The median difference is not zero.

Test Procedure:

1. Calculate the difference $d_i = X_{post} - X_{pred}$
2. Rank the absolute values $|d_i|$
3. Assign signs to ranks based on direction of difference
4. Calculate the sum of positive and negative ranks
5. The test statistic W is the smaller of the two rank sums

2.7.2.2. Mann-Whitney U Test

Used to compare post-test scores between the experimental and control groups without assuming normality.

Hypotheses:

- **H_0 :** The distribution of scores is the same across groups.
- **H_1 :** The distributions are different.

Formula:

$$U = n_1 n_2 \frac{n_1(n_2 + 1)}{2} - R_1$$

Where:

- n_1, n_2 = Sample sizes
- R_1 = Sum of ranks for group 1

A Z transformation can be applied to standardize U for significance testing:

$$Z = \frac{U - \mu_u}{\sigma_u}$$

Where:

- $\mu_u = \frac{n_1 n_2}{2}$
- $\sigma_u = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$

2.8. Tests of Normality

To determine whether parametric tests were appropriate, the Kolmogorov-Smirnov and Shapiro-Wilk tests were conducted:

- Both tests returned significant p-values (< 0.05) for pre-test and post-test scores, indicating non-normal distributions.
- This necessitated the use of non-parametric tests as confirmatory measures.

2.9. Statistical Software

All statistical analyses were performed using SPSS (Statistical Package for the Social Sciences) Version 25. Both descriptive and inferential statistics were computed, and significance was interpreted at the 5% level ($p < 0.05$).

3. Results

3.1. Descriptive Statistics

3.1.1. Distribution of respondents

The participants' ages range from 12 to 15 years, with a mean age of 13.56 years and a standard deviation of 0.871, indicating a fairly tight age distribution. The skewness is approximately 0 (-.001), suggesting a symmetric distribution, while the kurtosis is -0.667, implying a distribution that is slightly flatter than normal.

The sample consists of 150 students, with 68.7% being male and 31.3% female. This shows a significant gender imbalance, with more than twice as many male students as female.

Table 1: Descriptive Statistics for Age and Sex

Variable	N	Min	Max	Mean	Std. Dev.	Skewness	Kurtosis	Distribution (%)
Age (years)	150	12	15	13.56	0.871	-0.001	-0.667	
Sex	150							Male: 68.7%, Female: 31.3%

3.1.2. Descriptive statistics for the pre-test and post-test scores

Descriptive statistics for the pre-test and post-test scores are summarized in Table 2. The mean score before the intervention was 3.69 (SD = 2.96), while the post-test mean increased significantly to 7.75 (SD = 1.77). Skewness and kurtosis values indicate a moderate deviation from normality.

Table 2: Descriptive Statistics for Pre-test and Post-test Scores

Measure	Min	Max	Mean	Std. Dev	Skewness	Kurtosis
Pre-test	0	10	3.69	2.96	0.70	-0.52
Post-test	4	10	7.75	1.77	-0.26	-0.72

3.2. Normality Testing

The Shapiro-Wilk and Kolmogorov-Smirnov tests (Table 3) show significant p-values ($p < .001$), indicating that both pre-test and post-test scores significantly deviate from a normal distribution. This justified the use of both parametric and non-parametric methods for validation.

Table 3: Tests of Normality

Variable	Test	Statistic	df	Sig.
Pre-test	Shapiro-Wilk	.856	110	.000
Post-test	Shapiro-Wilk	.887	110	.000

3.3. Paired Sample Comparison

A paired sample t-test revealed a significant improvement in scores from pre- to post-test ($M = -4.07$, $SD = 2.35$, $t(149) = -21.21$, $p < .001$), suggesting that the intervention significantly enhanced students' understanding.

To account for the non-normality, a Wilcoxon Signed-Rank Test was conducted. The result also confirmed a statistically significant increase in scores ($Z = -10.98$, $p < .001$), thus reinforcing the conclusion that the intervention was effective.

Table 4: Parametric and Non-Parametric Tests for Pre-Post Difference

Test Type	Test Statistic	df	p-value	Conclusion
Paired t-test	$t = -21.21$	149	.000	Significant
Wilcoxon Signed-Rank	$Z = -10.98$		.000	Significant

3.4. Group Comparison: Experimental vs Control

Independent t-test results showed no statistically significant difference between post-test scores of the two groups ($t(148) = .437$, $p = .662$). Equal variance was not assumed due to Levene's test ($F = 14.85$, $p < .001$). Similarly, the Mann-Whitney U test yielded $U = 2283.5$, $p = .619$, affirming that the group differences were not statistically significant.

Table 5: Comparison of Post-Test Scores between Groups

Group	N	Mean	SD	Test	Statistic	p-value	Conclusion
Group 1	103	7.80	1.96	t-test (equal var)	$t = .437$	.662	Not Significant
Group 2	47	7.66	1.27	Mann-Whitney U	$U = 2283.5$	.619	Not Significant

4. Conclusion

The findings of this study provide substantial evidence that the use of an educational computer package significantly improves pupils' understanding of geometry at the Basic Five level. The paired samples t-test revealed a statistically significant increase in post-test scores compared to pre-test scores, with a mean difference of -4.067 ($p < 0.001$), indicating marked improvement in performance after the intervention. Furthermore, the results of the non-parametric Wilcoxon Signed-Rank Test confirmed the statistical significance of this improvement, reinforcing the reliability of the findings despite slight deviations from normality in the data distribution. While the independent samples t-test showed no statistically significant difference between the two groups (control and experimental), the within-group analysis clearly demonstrated that students benefited more when exposed to the computer-based instructional method. The implication of these results is that incorporating interactive, visual learning tools into the teaching of geometry can enhance conceptual understanding and engagement among primary school pupils. The integration of technology in mathematics instruction should therefore be considered a valuable strategy for curriculum improvement in basic education.

Ethical Considerations

Approval was obtained from the school authority and consent was secured from parents and guardians of the participating pupils. Participants were informed about the purpose of the study, and confidentiality of their information was guaranteed. Participation was voluntary, and pupils were allowed to withdraw at any stage of the study without any penalty.

References

- Achor, E. E., Imoko, B. I., & Jimin, U. (2015). Improving some Nigerian secondary students' achievement in geometry: A field report on team teaching approach. *New York Science Journal*, 5(1), 37–42.
- Chesimet, M. C., Githua, B. N., & Ng'eno, J. K. (2016). Effect of experiential learning approach on students' mathematical creativity among secondary school students of Kericho East-Country, Kenya.
- Dimla, R. B. (2018). Probing students' levels of geometric thinking in geometry and their enacted example space function. *Journal of Education in Black Sea Region*, 4(1), 155–163. <https://doi.org/10.31578/jebbs.v4i1.162>
- Fujita, T., & Jones, K. (2002). The bridge between practical and deductive geometry: Developing the 'geometrical eye'. In *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 383–391).
- Hasibuan, S., Saragih, S., & Amry, Z. (2019). Development of learning materials oriented on problem-based learning model to improve students' mathematical problem-solving ability and metacognition ability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(2), 243–252.

- Iji, C. O. (2007). Challenges of primary mathematics for universal basic education (UBE). *ABACUS: Journal of the Mathematical Association of Nigeria*, 32(1), 14–23.
- Jones, K. (2002). Issues in the teaching and learning of geometry. In L. Haggarty (Ed.), *Aspects of teaching secondary mathematics: Perspectives on practice* (pp. 121–139). Routledge.
- Komalasari, K. (2012). Relevance of Realistic Mathematics Education Approach to daily life of junior high school students. *Journal of Education and Learning*, 6(3), 225–232.
- Kurumeh, M. S. (2006). Effect of ethnomathematics approach on students' achievement in geometry and mensuration. *ABACUS: Journal of the Mathematical Association of Nigeria*, 31(1), 35–44.
- Kurumeh, M. S. (2007). Effect of ethnomathematics approach on students' interest in geometry and mensuration. *ABACUS: Journal of the Mathematical Association of Nigeria*, 32(1), 103–114.
- Pittalis, M., & Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics*, 75, 191–212. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9251-8>
- Sawangsri, S. (2016). The effectiveness of multimedia learning package on the basic of constructivism theory in enhancing the high learning achievement and problem-solving abilities of Mathayomsuksa 2 students. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, 7(2 S1), 481–489.
- Smith, J., & Jones, P. (2015). The impact of a structured learning package on students' mathematical achievement. *Journal of Educational Research*, 108(5), 402–415.

TEORIE ČÍSEL V PROBLÉMOVÉ VÝUCE

Jaroslav BERÁNEK

Masarykova Univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)

beranek@ped.muni.cz

Abstrakt

Příspěvek je věnován přípravě budoucích učitelů matematiky a obsahuje témata vhodná k rozvíjení a rozšiřování jejich znalostí. Příspěvek obsahuje dva řešené problémy ze zahraniční matematické soutěže Putnam exam (problém vyvážených trojic a Josephusův problém). Při jejich řešení využijeme mj. dvojkovou poziční číselnou soustavu.

Klíčová slova: dvojková soustava, rekurentní vztah, induktivní postup, iracionální číslo.

NUMBERS THEORY IN PROBLEMS TEACHING

Abstract

The article is devoted to teaching of future teachers of Mathematics and deals with some topics for deepening and enlarging of their knowledge. The article contains two solved problems from the international Mathematics competition Putnam Exam (problem of harmonious triads and Josephus problem). While solving these problems also the binary number system is used.

Keywords: binary system, recurrence relation, inductive method, irrational number.

1. Úvod

V současné době dochází v obsahu výuky na základních školách k významným změnám, které se týkají rovněž výuky matematiky. Na tuto skutečnost musí odpovídajícím způsobem reagovat příprava nejen budoucích učitelů matematiky na 2. stupni ZŠ, ale i budoucích učitelů 1. stupně základní školy. V matematice je nutné kromě základního učiva a potřebného nadhledu k němu poskytovat studentům další témata, která nejsou příliš vzdálena od osnov školské matematiky a která mohou rozvíjet jejich matematické znalosti a dovednosti. Současně je nutné seznamovat studenty s možnostmi pro zájmovou činnost v matematice a s různými typy matematických soutěží, a to i na 1. stupni ZŠ. V tomto příspěvku jsou obsaženy dva řešené problémy ze zahraniční matematické soutěže Putnam exam. Tato soutěž Williama Lowella Putnama se poprvé konala v roce 1938 a každoročně se jí zúčastňují zájemci z řad studentů vysokých škol v USA a v Kanadě. Je to náročná soutěž, trvající šest hodin. Je rozdělena na dvě části po třech hodinách, přičemž v každé části řeší studenti šest problémů. Oba problémy, které jsou obsahem tohoto příspěvku, mají tematicky společné to, že při jejich řešení využijeme dvojkovou poziční číselnou soustavu. Převody zápisů čísel z desítkové do dvojkové soustavy a naopak považujeme za známé, stejně jako číselný obor reálných čísel. Oba uvedené problémy jsou převzaty z publikace L. C. Larsona (Larson, 1990), o Josephusově problému je možno nalézt podrobnější informace v článku P. Pavlíkové (Pavlíková, 2012) i na www-stránkách (Weisstein, 2017).

2. Problém vyvážených trojic

Zadání problému: Uspořádaná trojice (x_1, x_2, x_3) kladných iracionálních čísel s vlastností $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ se nazývá vyvážená trojice, jestliže $x_i < \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, 3$. Není-li trojice vyvážená, tj. existuje právě jeden index $j \in \{1, 2, 3\}$ s vlastností $x_j > \frac{1}{2}$ (čísla jsou iracionální), provedeme vyvažovací operaci V definovanou takto:

$$V(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3), \text{ kde } y_i = 2x_i \text{ v případě } i \neq j, y_j = 2x_j - 1.$$

Není-li trojice (y_1, y_2, y_3) vyvážená, provedeme tutéž vyvažovací operaci znovu. Vede vždy tento proces po konečném počtu vyvažovacích operací V k vyvážené trojici?

Řešení problému: Úvodem poznamenejme, že po každém provedení vyvažovací operace V bude vždy platit $y_1 + y_2 + y_3 = 1$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $\frac{1}{2} < x_3 < 1$.

Z předpokladu $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ plyne $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2$, odkud plyne platnost rovnosti $2x_1 + 2x_2 + (2x_3 - 1) = 1$. S ohledem na definici operace V dostáváme $y_1 + y_2 + y_3 = 1$. Využijeme dvojkovou soustavu. Čísla x_1, x_2, x_3 vyjádříme ve tvaru:

$$x_1 = 0, a_1 a_2 a_3 \dots, x_2 = 0, b_1 b_2 b_3 \dots, x_3 = 0, c_1 c_2 c_3 \dots \quad (1)$$

kde všechny cifry $a_i, b_i, c_i, i \in \mathbb{N}$ jsou buďto 0 nebo 1. Je-li trojice (x_1, x_2, x_3) vyvážená, tedy $x_i < \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, 3$, musí nutně platit $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ (neboť tato cifra odpovídá v každém z rozvoju mocnině $2^{-1} = \frac{1}{2}$). Není-li vyvážená, pak u čísla většího než 0,5 je za desetinnou čárkou číslice 1. Nyní určíme, jak se změní dvojkové zápisy (1) po provedení vyvažovací operace V . Protože cifry v zápisech daných čísel (1) odpovídají mocninám $2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, \dots$, je zřejmé, že násobení daného čísla dvěma vede k posunutí desetinné čárky o jedno místo doprava. V případě, že je číslo menší než $\frac{1}{2}$, zůstává u něj před desetinnou čárkou číslice 0. Je-li číslo větší než $\frac{1}{2}$ a menší než 1 (podle zadání), pak se objeví po vynásobení dvěma před desetinnou čárkou číslice 1. Podle definice vyvažovací operace V se však v tomto případě číslo 1 odečítá. Provedení vyvažovací operace tedy u všech čísel dané trojice (1) znamená posunutí desetinné čárky o jedno místo doprava a nahrazení číslice 1 před desetinnou čárkou číslicí 0. Platí tedy:

$$y_1 = 0, a_2 a_3 a_4 \dots, y_2 = 0, b_2 b_3 b_4 \dots, y_3 = 0, c_2 c_3 c_4 \dots$$

Postupné provádění operace V pak znamená postupné posouvání desetinné čárky doprava. Problém se nyní redukuje na zjištění, zda po konečném počtu vyvažovacích operací musí nastat případ, kdy všechna čísla ve trojici budou mít současně první číslici za desetinnou čárkou rovnu nule. Ukážeme na příkladu, že tato situace vždy nastat nemusí. Pro další úvahy je nutno si uvědomit, že vzhledem k zadání (všechna čísla jsou kladná iracionální) musí být rozvoje daných čísel v původní trojici (1) nekonečné a neperiodické. Pro konstrukci protipříkladu ukazujícího možnou nekonečnost procesu vyvažování využijeme podmínku $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Součet jedna lze dosáhnout např. tak, že ve vyjádření (1) musí být pro každý index $i \in \mathbb{N}$ právě jedno z čísel a_i, b_i, c_i rovno 1 a zbylé dvě rovny 0. Po rozvinutí součtu $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ve dvojkové soustavě dostaneme za těchto podmínek číslo $0, \overline{1} = 0,1111\dots$, které je v desítkové soustavě rovno jedné. Příklad výchozí trojice čísel (1) lze zvolit např. takto: Nechť $a_i = 1$, právě když číslo i je liché prvočíslo, v ostatních případech nechť $a_i = 0$. Nechť dále číslo $b_i = 1$, právě když číslo $i - 1$ je liché prvočíslo, v ostatních případech nechť $b_i = 0$. Nakonec nechť $c_i = 1$, právě když $a_i + b_i = 0$, v ostatních případech nechť $c_i = 0$. Žádná dvě lichá prvočísla nenásledují v řetězci přirozených čísel bezprostředně po sobě, proto nikdy

nemohou být čísla a_i , b_i pro žádný přirozený index i současně rovna jedné. Protože prvočísel je nekonečně mnoho a jejich rozložení v řadě přirozených čísel je zcela nepravidelné, nemůže být při dané volbě indexů žádný z rozvojų ve vyjádření (1) periodický. Výchozí trojici čísel volíme tedy takto:

$$x_1 = 0,0010101000101000101000100000101000001000\dots,$$

$$x_2 = 0,0001010100010100010100010000010100000100\dots,$$

$$x_3 = 0,1100000011000011000011001111000011110011\dots.$$

Z provedených úvah plyne, že tato trojice čísel není vyvážená a proces vyvažování prováděný postupnými iteracemi operace V nikdy nemůže skončit vyváženou trojicí, neboť při postupném posouvání desetinné čárky o jedno místo doprava vždy bude právě jedno z čísel mít hned za desetinnou čárkou číslici jedna, a tedy bude větší než $\frac{1}{2}$.

3. Josephusův problém

Obecná formulace: Necht' $k, n \in \mathbb{N}$, $2 \leq k \leq n$. Čísla $1, \dots, n$ rozmístíme v přirozeném uspořádání po obvodu kruhu (např. proti směru hodinových ručiček). Prvních $k-1$ čísel ponecháme beze změny, pak odstraníme číslo k , dále postupně proti směru hodinových ručiček odebíráme každé k -té číslo z těch, která ještě zůstala. Proces odebírání čísel končí, jakmile na obvodu kruhu zůstane méně než k čísel. Označme $L(n, k)$ množinu těchto zbylých prvků. Problémem je určit výčetem nebo nějak charakterizovat prvky této množiny.

Poznamenejme, že pro $k = n$ je problém triviální; množina zbylých prvků $L(n, k)$ má vždy $k-1$ prvků.

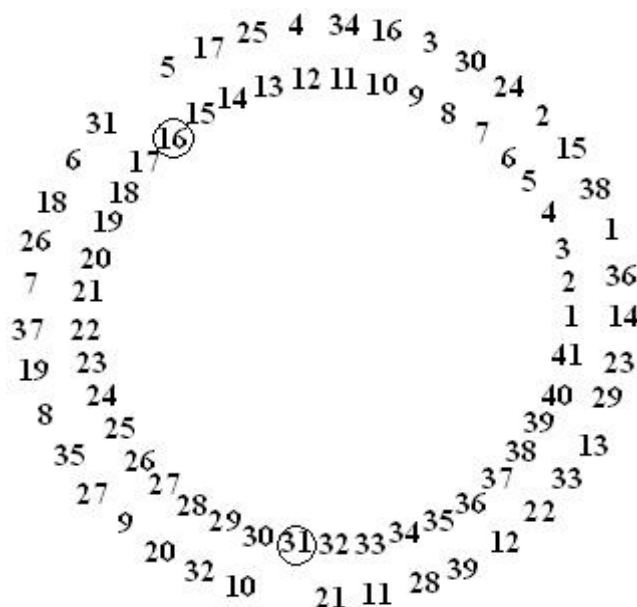
Nyní uvedeme historický úvod k problému (převzato z Pavlíková, 2012, str. 275).

Josephus Flavius, vlastním jménem Jóséf ben Mattatjáh, se narodil v roce 37 n. l. v Jeruzalémě. Pocházel z vysoce postavené rodiny. Již od raného mládí byl velmi vzdělaný, měl přehled o židovské, řecké i římské kultuře. Když vypuklo židovské protiřímské povstání v Galilei, byl jmenován jedním z hlavních velitelů. Proti přesile, vedené vynikajícím římským vojevůdcem Vespasiánem, však Židé neměli nejmenší šanci. V červenci roku 67 n. l. byl Josephus spolu se čtyřiceti svými bojovníky obklíčen římskou armádou v úkrytu poblíž pevnosti Jotapata. Jeho vojáci se rozhodli vyhnout se zajetí tím, že si vezmou život. Josephus ovšem nesouhlasil a tak na jeho návrh losovali s tím, že další vylosovaný zabije předchozího vylosovaného, a tak budou postupovat tak dlouho, dokud nezůstane naživu jen poslední z nich, který spáchá sebevraždu. O samotném mechanismu losování nemáme podrobnější informace. Ve skutečnosti zůstal Josephus jako jeden ze dvou posledních naživu a svého přítele přemluvil, aby se společně vzdali Římanům. Zda jeho přežití bylo dílem štěstěny, projevem boží vůle nebo výsledkem jeho vychytralosti, dnes můžeme pouze spekulovat.

Pravděpodobně první, kdo popis losování mezi Josephem a jeho muži okořenil legendou o rozestavení 41 mužů do kruhu a jejich postupnou eliminací, byl Girolamo Cardano (1501–1576). V jeho spise *Practica arithmetice et mensurandi singularis* z roku 1539. Za jeden z prvních pokusů o ryze matematický náhled do problematiky rozpočítávacích úloh lze označit práci Leonharda Eulera (1707–1783) z roku 1776 (Euler, 1776).

Formulace Josephusova problému z matematického hlediska podle jednoho z internetových zdrojů je následující (Weisstein, 2017). Josephus byl společně se svými 40 spolubojovníky uvězněn v jeskyni a obklíčen římským vojskem. Raději než zajetí se rozhodli volit dobrovolnou sebevraždu, přičemž postup svého sebezničení provedli v pořadí, které Josephus navrhnul. Všichni se postavili na obvod kruhu a očíslovali se čísla od 1 do 41. Každý

třetí potom vždy postupně volil smrt. Bojovníci ovšem netušili, že Josephus se svým nejvěrnějším přítelem zaujali taková dvě místa v kruhu bojovníků, aby nakonec zůstali živí právě jen sami dva. Jim se nakonec po jejich přidání k Římanům podařilo zachránit. V řeči matematiky se jedná o výše popsany problém pro výchozí hodnoty $n = 41$, $k = 3$. Postup sebevražd bojovníků a umístění Josephuse a jeho přítele ukazuje následující obrázek 1 (Weisstein, 2017).



Obrázek 1. Josephusův problém pro $n = 41$, $k = 3$

Na vnitřní kružnici je zobrazeno původní rozmístění čísel od 1 do 41, čísla na vnější kružnici vyjadřují, kolikátý v pořadí bude takto očíslovaný bojovník odstraněn. Zakroužkovaná čísla 16 a 31 na vnitřní kružnici po odebrání všech ostatních zůstanou (označují pozice Josephuse a jeho přítele).

Nyní se budeme věnovat řešení popsaného problému. Protože pro $k > 2$ je řešení poměrně složité a při určování $L(n, k)$ se využívá komplikovaných rekurentních vztahů (Pavlíková 2012), omezíme se s ohledem na didaktický účel tohoto příspěvku na případ pro $k = 2$. Z obecné formulace plyne, že na kruhu v tomto případě zůstane nakonec jediný prvek. Z didaktických důvodů uvedeme nyní upravenou formulaci problému.

Zadání problému: Čísla $1, 2, \dots, n$ rozmístíme v přirozeném uspořádání po obvodu kruhu (proti směru pohybu hodinových ručiček). Potom odstraníme číslo 2 a postupně proti směru pohybu hodinových ručiček odebíráme každé druhé číslo z těch, která ještě zůstala. Nechť $f(n)$ označuje poslední číslo, které zůstane na kružnici. Nalezněte funkční předpis pro hodnotu $f(n)$.

Nyní se tedy budeme zabývat nalezením vztahu pro přímý výpočet hodnoty $f(n)$, viz např. (Pavlíková 2012), (Weisstein, 2017). Využijeme induktivní postup. Hodnoty $f(n)$ pro několik prvních hodnot n jsou uvedeny v tabulce 1:

Tabulka 1: Hodnoty $f(n)$ pro $n = 1, \dots, 16$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

Z tabulky lze usoudit na fakt, že hodnota $f(n)$ je rovna jedné, právě když n je mocninou čísla dvě. Přijmeme-li tento fakt za „pracovní hypotézu“, je možno v tabulce pozorovat další zákonitost. Je zřejmé, že pro každé přirozené číslo n je jednoznačně určena dvojice nezáporných celých čísel m, k s vlastností $n = 2^m + k$, přičemž současně $0 \leq k < 2^m$. Vyjádříme-li takto přirozené číslo n našeho problému, potom pro hodnotu $f(n)$ platí vztah

$$f(n) = 2k + 1. \quad (2)$$

Vztah (2) lze dokázat matematickou indukcí, viz např. (Pavlíková 2012), (Weisstein, 2017).

Další zajímavou otázkou nyní je, zda neexistuje vztah pro výpočet hodnoty $f(n)$ ve tvaru funkčního předpisu závisícího pouze na čísle n (vztah (2) vyžaduje vyjádření čísla n pomocí dalších proměnných). Tento problém již nesouvisí s původním problémem Flaviuse Josephuse, ale jedná se o problém teorie dělitelnosti, popř. teorie čísel. V literatuře, např. (Weisstein, 2017), lze nalézt řešení. Hledaný vzorec je tvaru

$$f(n) = 2n + 1 - 2^{1+[lg_2 n]} \quad (3)$$

kde $[lg_2 n]$ označuje celou část reálného čísla $lg_2 n$. Poznamenejme, že vztahy (2) a (3) jsou ekvivalentní a dávají pro všechna přirozená čísla n stejné hodnoty. Důkaz je velmi snadný; po dosazení do vztahu (3) platí:

$$f(n) = 2 \cdot (2^m + k) + 1 - 2^{1+[lg_2 n]} = 2^{(m+1)} + 2k + 1 - 2^{1+[lg_2 n]} = 2k + 1, \text{ neboť platí } [lg_2 n] = m.$$

Nyní již máme k dispozici funkční předpis (3), který určuje číslo, které zůstane po odstranění všech ostatních na obvodu kruhu. Jako zajímavou aplikaci uvedeme nyní dvojí možné vyjádření tohoto předpisu pro $f(n)$ s využitím dvojkové číselné soustavy (Larson, 1990). Opět s ohledem na účel příspěvku uvedeme pouze řešení, důkaz lze nalézt v literatuře (Larson, 1990). Důkaz je poměrně obtížný a zejména u budoucích učitelů 1. stupně ZŠ by mohl vyvolat i negativní vztah k matematice.

Jak tedy rychle určit číslo, které jako poslední z rozmístěných n čísel zůstane na kružnici? Stačí číslo n rozvinout ve dvojkové soustavě a každý koeficient nula v tomto vyjádření nahradit při výpočtu číslem -1 .

Např.:

$$\begin{aligned} f(17) &= f(10001)_2 = 16 - 8 - 4 - 2 + 1 = 3, \\ f(43) &= f(101011)_2 = 32 - 16 + 8 - 4 + 2 + 1 = 23. \end{aligned}$$

Hodnotu $f(43)$ ověříme i podle vztahu (3). Víme, že $[lg_2 43] = 5$, proto $f(43) = 86 + 1 - 64 = 23$. Čísla jsou z kruhu pro $n = 43$ odebrána v tomto pořadí: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 3, 11, 19, 27, 35, 43, 15, 31, 7, 39.

Vyjádření hodnoty $f(n)$ lze provést i jiným, velmi efektním způsobem. Číslo n vyjádříme ve dvojkové soustavě jako $n = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_2$. Hodnotu $f(n)$ lze pak určit velmi jednoduchým vyjádřením $f(n) = (a_{k-1} \dots a_1 a_0 a_k)_2$, tj. první číslici zleva v zápise čísla n přesuneme na poslední místo napravo a ostatní ponecháme beze změny. Podobně jako v desítkové soustavě „nuly zleva“ můžeme vynechat.

Např.:

$$\begin{aligned} f(17) &= f(10001)_2 = (00011)_2 = (11)_2 = 3, \\ f(43) &= f(101011)_2 = (10111)_2 = 23. \end{aligned}$$

Důkaz opět uvádět nebudeme, viz např. Pavlíková, 2012. Oba způsoby vyjádření $f(n)$ pomocí dvojkové číselné soustavy jsou ekvivalentní.

4. Závěr

V příspěvku jsme demonstrovali řešení dvou problémů. Jednak problému vyvážených trojic a jednak tzv. Josephusova problému, kde jsme pro $k = 2$ podali řešení, jak určit výslednou hodnotu $f(n)$. Oba tyto problémy, stejně jako mnoho podobných dalších, na které v příspěvku nezbylo místo, pocházejí ze zahraniční matematické soutěže Putnam Exam. I z toho je vidět, že vhodnost zadávání takovýchto problémů studentům je nesporná. I když studenti nenaleznou úplné řešení problému samostatně, myšlenkové postupy při zkoumání značným způsobem rozvíjejí jejich matematické schopnosti. Současně si uvědomují různé souvislosti, kdy při řešení jednoho problému vyvstane nutnost řešit problém jiný. Při řešení Josephusova problému pro hodnoty $k = 2$ jsme např. upozornili na problémy ekvivalentnosti různých vyjádření hodnoty $f(n)$. Obtížným problémem, zasahujícím i do oblasti výpočetní techniky, je řešení Josephusova problému pro $k > 2$.

Literatura

- Bělík, M. (1999). *Poziční číselné soustavy*. Ústí nad Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně.
- Euler, L. (1776). *Observationes circa novum et singulare progressionem genus*. Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitane 20 (1776), 123–139.
- Hejný, M. a kol. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.
- Jelínek, M. (1974). *Numerální soustavy*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.
- Larson, L. C. (1990). *Metódy riešenia matematických problémov*. Bratislava: Alfa.
- Pavlíková, P. (2012). O Josephově problému. *Pokroky matematiky, fyziky & astronomie*, 57(4), 274–284.
- Weisstein, E. W. (2017). *Josephus Problem*. From MathWorld, A Wolfram Web Resource. Dostupné z <http://mathworld.wolfram.com/JosephusProblem.html>.

ODBORNÁ PŘÍPRAVA BUDOUCÍCH UČITELŮ MATEMATIKY NA 1. STUPNI ZŠ

Jitka PANÁČOVÁ

Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)

panacova@ped.muni.cz

Abstrakt

Příspěvek ilustruje na konkrétních vybraných příkladech pojmů odborné matematiky, která je součástí přípravy budoucích učitelů 1. stupně ZŠ, jejich přímé propojení se školskou matematikou. Demonstruje klíčovost důkladného pochopení vzájemné souvislosti mezi těmito dvěma paralelami pro kvalitní způsobilost budoucího učitele matematiky 1. stupně ZŠ. Tato provázanost je přiblížena prostřednictvím ukázek z vybraných učebnic matematiky 1. stupně ZŠ. Obsah odborné přípravy v matematických předmětech budoucího učitele 1. stupně ZŠ a schopnost a dovednost jeho didaktického zpracování v rámci didaktiky matematiky 1. stupně ZŠ je důležitým předpokladem pro pochopení matematiky u žáků a v návaznosti na to i pro oblíbenost tohoto předmětu.

Klíčová slova: učitel matematiky, matematické pojmy, matematické učivo, způsobilost učitele

PROFESSIONAL TRAINING OF FUTURE MATHEMATICS TEACHERS AT PRIMARY SCHOOL

Abstract

The paper illustrates, using specific selected examples of concepts of professional mathematics, which is part of the training of future teachers of the first stage of primary schools, their direct connection with school mathematics. It demonstrates the necessity of a thorough understanding of the mutual connection between these two parallels for the high-quality competence of a future teacher of the first stage. This direct connection is illustrated by examples from selected textbooks of mathematics of the first stage. The content of professional preparation in mathematical subjects of a future teacher of the first stage of primary schools and the ability and skill of its didactic processing within the framework of mathematics didactics of the first stage of primary schools is a necessary prerequisite for understanding mathematics among pupils and, consequently, for the popularity of this subject.

Keywords: mathematics teacher, mathematical concepts, mathematical curriculum, teacher qualification.

1. Úvod

Cílem příspěvku je ilustrovat na konkrétních vybraných oblastech odborných matematických předmětů, které jsou součástí přípravy budoucích učitelů 1. stupně ZŠ, jejich přímé propojení se školskou matematikou. Demonstruje důležitost důkladného pochopení vzájemné souvislosti mezi těmito dvěma paralelami pro kvalitní způsobilost budoucího učitele 1. stupně ZŠ.

Tato provázanost je přiblížena prostřednictvím ukázek z vybraných učebnic matematiky 1. stupně ZŠ. Obsah odborné přípravy v matematických předmětech budoucího učitele 1. stupně ZŠ a schopnost a dovednost jeho didaktického zpracování v rámci didaktiky matematiky 1. stupně ZŠ je významným předpokladem pro pochopení matematiky u žáků a v návaznosti na to i pro oblíbenost tohoto předmětu.

Tento příspěvek je určen pro vzdělavatele matematických předmětů budoucích učitelů 1. stupně ZŠ a pro samotné studenty učitelství 1. stupně ZŠ.

2. Očekávané předpoklady učitele matematiky 1. stupně ZŠ

Cíl přípravy učitelů 1. stupně ZŠ je zaměřen na osvojení si znalosti a dovednosti v oblasti pedagogiky, pedagogické psychologie a obecné didaktiky, tj. na pedagogickou způsobilost. Tyto kompetence získávají studenti učitelství 1. stupně ZŠ příslušným studiem učitelského zaměření. Svou odbornou způsobilost pak získají studiem odpovídajícího oboru na vysoké škole, v našem případě studiem matematických předmětů určených pro učitelství 1. stupně ZŠ.

S ohledem na tuto skutečnost a vzhledem k tématům objevujícím se v učivu matematiky 1. stupně ZŠ by měl být budoucí učitel připraven orientovat se v odborné podstatě učiva matematiky na 1. stupni ZŠ. V kontextu tohoto by měl ovládat a chápat tato témata: základy výrokové logiky, množiny a operace s nimi, kartézský součin množin, binární relace v množině a její vlastnosti (týká se aritmetiky i rovinné a prostorové geometrie), relace ekvivalence a uspořádání, zobrazení množin v aritmetice i v geometrii, algebraické operace a jejich vlastnosti. V návaznosti na to by měl mít osvojenou odbornou podstatu přirozených čísel z pohledu kardinálních a ordinálních čísel a prvků Peanovy množiny. Budoucí učitel matematiky 1. stupně ZŠ by měl rozumět výše popsaným základům odborné matematiky potřebným k tomu, aby byl schopný didakticky správně interpretovat učivo školské matematiky. Jeho znalosti by se měly vztahovat i k aktuálnímu obsahu učiva školské matematiky, s čímž souvisí vhodná volba způsobu a vyvození nového matematického učiva a vhodný výběr příslušných aktivit a didaktických pomůcek. Budoucí učitel matematiky 1. stupně ZŠ by měl být zároveň obeznámen s tím, jaké výukové metody používat a jaké matematické kompetence u žáků v této souvislosti rozvíjet, aby byli schopni nad zadanou úlohou samostatně přemýšlet, správně ji vyřešit a prohluboval se u nich zájem o matematiku.

Těmito požadavky je předurčena učitelova schopnost a dovednost naučit žáky používat matematiku v řadě situací, s nimiž se v životě setkají. Ideální je volba takové formy výuky, aby se pro žáky stala matematika radostí nikoli strašákem.

Výuka matematických předmětů by tedy měla v rámci přípravy budoucích učitelů matematiky 1. stupně ZŠ směřovat k těmto třem popsaným cílům:

1. Studenti učitelství 1. stupně ZŠ jsou seznámeni s **odbornou podstatou matematiky 1. stupně ZŠ** a s porozuměním reflektují její souvislost s běžnými situacemi reálného života.
2. Studentům učitelství 1. stupně ZŠ jsou představeny způsoby **správného didaktického využití této odborné podstaty ve výuce matematiky** na 1. stupni ZŠ.
3. Studenti jsou obeznámeni s **aktuálním obsahem učiva školské matematiky**.

Domníváme se, že získání požadované odbornosti učitele matematiky 1. stupně ZŠ je podmíněno splněním těchto tří popsaných cílů, přičemž porozumění odborné podstaty matematiky 1. stupně ZŠ je výchozím a propojujícím bodem pro cíle následující. Důsledek chybějícího porozumění odborné podstaty matematiky 1. stupně ZŠ či jejího povrchního zvládnutí se může projevit později v nedostatečné odbornosti budoucího učitele v tomto oboru v kontextu s didaktickým uchopením učiva školské matematiky. Následek tohoto jevu se může

odrážet v jejím nepochopení a v její neoblíbenosti u žáků 1. stupně ZŠ. V tomto momentě přestává být matematika pro žáky radostí.

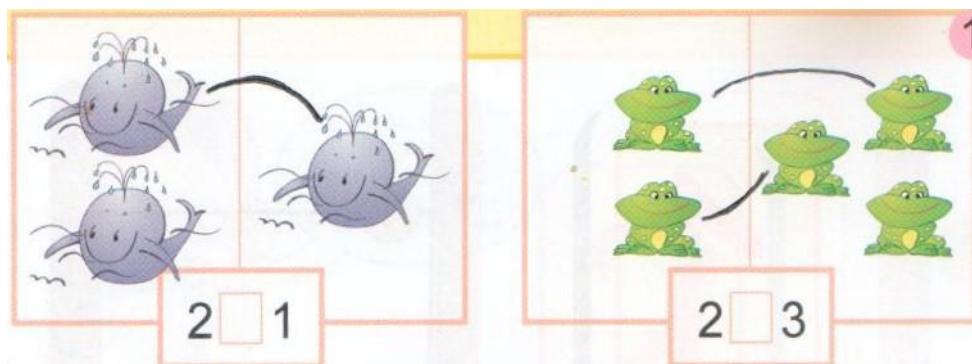
Pojďme si níže na několika příkladech přiblížit souvislost a provázanost odborných matematických pojmů s učivem školské matematiky 1. stupně ZŠ.

3. Souvislost mezi odbornými matematickými pojmy a učivem školské matematiky (aritmetika)

Děti předškolního věku získávají velmi brzy zkušenosti se vzájemnými vztahy mezi různými objekty, poznávají příbuzenské vztahy mezi členy rodiny matka – dítě, bratr – setra, mladší – starší apod. Rozhodují, zda dané kostky mají stejnou (různou) barvu, tvar či velikost. Vnímají, že jedno dítě má více pastelek než druhé, poměřují se podle velikosti, při různých aktivitách vytváří dvojice děvče – chlapec, hrneček – talířek, nůž – vidlička, zvíře – mládě atd. Vytvářejí tedy dvojice podle určitého vztahu, třídí předměty podle určité vlastnosti, uspořádávají předměty dle zadané dohody, přiřazují objekty objektům (Blažková, 2020; Fuchs et al., 2015; Kaslová, 2012). Veškeré tyto vztahy jsou z odborného hlediska **binární relace v množině, relace ekvivalence a uspořádání, relace zobrazení mezi množinami**, přičemž jejich prvky jsou ony uvažované uspořádané dvojice.

Děti se už v mateřské škole setkávají s přirozenými čísly. Na začátku 1. stupně ZŠ se u nich vytváří představy o čísle, učí se čísla zapisovat pomocí číslic, porovnávat je a operovat s nimi (sčítání/odčítání/násobení/dělení). Podstatou pojmu přirozeného čísla je pojem **kardinálního čísla** konečné množiny, **ordinálního čísla** dobře uspořádané konečné množiny či prvku **Peanovy množiny**, přičemž ze všech těchto tří pohledů jsou dětem přirozená čísla představena. Z těchto důvodů by měly být tyto pojmy po teoretické stránce budoucím učitelům známy a současně by je měl umět zpracovat při zavedení přirozených čísel didakticky. Pro zmíněné teoretické pojmy je však nezbytná přechodná znalost **ekvivalentnosti množin, uspořádaných množin, pojem zobrazení a jeho typy, binární relace v množině a její vlastnosti, kartézský součin množin** (Panáčková & Beránek., 2020; Divíšek et al., 1989; Coufalová, 2016; Novák & Eberová, 1988; Hejny et al., 1990; Šedivý & Křižalkovič, 1990).

Na začátku 1. ročníku ZŠ (číselný obor do 5i) se žáci učí v tomto oboru přirozená čísla **porovnávat**. V rámci této aktivity pracují s několika typy **zobrazení z množiny X do množiny Y**, přičemž dle daného typu zobrazení se pak rozhoduje, zda prvků jedné množiny je více/méně/stejně než prvků množiny druhé. Tento jev je možno interpretovat na ukázce z učebnice matematiky Potůčkové (2018) na obrázku 1.



Obrázek 1. Ukázka porovnávání přirozených čísel (Potůčková, 2018).

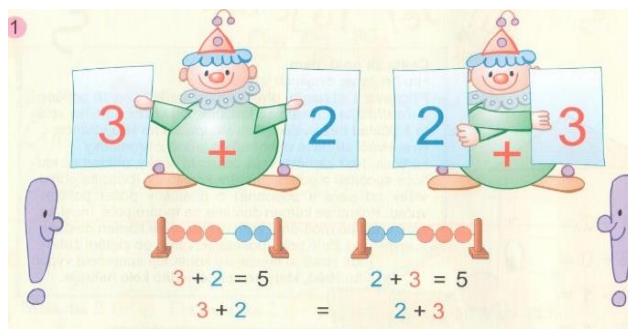
Dalším příkladem zobrazení z množiny X do množiny Y a nástrojem pro porovnávání přirozených čísel, které se uplatňuje v matematice od 1. ročníku, je zobrazení čísel na číselné ose.

Číselná osa je na 1. stupni ZŠ chápána jako polopřímka, přičemž při znázornění množiny přirozených čísel (včetně nuly) jde o prosté zobrazení množiny přirozených čísel (včetně nuly) do množiny bodů na polopřímce s počátkem 0. Ukázka na obrázku 2 představuje číselnou osu (znázorněnou úsečkou) jako reprezentanta množiny přirozených čísel od 0 do 1000, resp. do 500 (Blažková et al., 2018).

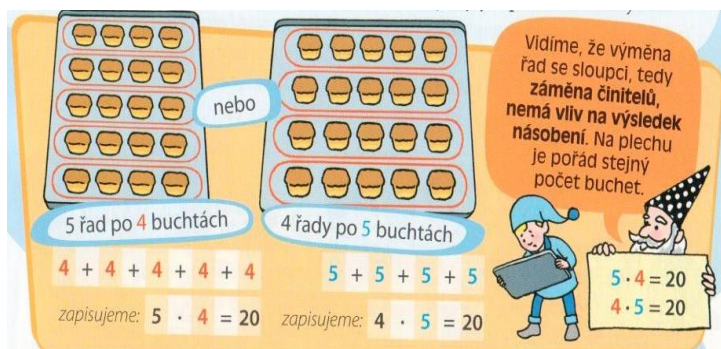


Obrázek 2. Ukázka číselné osy jako reprezentanta množiny přirozených čísel od 0 do 1000, resp. do 500 (Blažková et al., 2018).

V rámci porovnávání přirozených čísel se žáci setkávají s **relacemi uspořádání, nerovnosti a rovnosti** a na základě toho si osvojují jejich vlastnosti: antireflexivitu, antisymetrii a tranzitivitu, případně reflexivitu, symetrii a tranzitivitu. Obsahem učiva 1. stupně ZŠ jsou operace s přirozenými čísly - sčítání/odčítání, následně pak násobení/dělení. Při těchto operacích žáci objevují některé jejich vlastnosti, kdy u sčítání a násobení přirozených čísel se jedná o komutativní a asociativní zákon a o existenci tzv. neutrálního prvku. Ukázky na obrázku 3, resp. 4 vtipně reprezentují komutativitu sčítání přirozených čísel (Potůčková, 2018), resp. komutativitu násobení přirozených čísel (Bulín et al., 2007).



Obrázek 3. Reprezentace komutativity sčítání přirozených čísel (Potůčková, 2018).



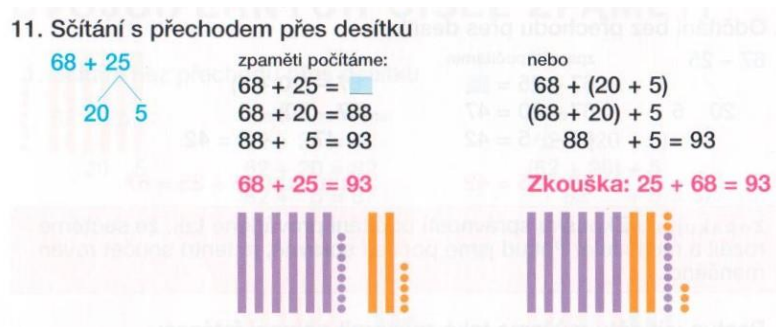
Obrázek 4. Reprezentace komutativity násobení přirozených čísel (Bulín et al., 2007).

Některé ze zmiňovaných vlastností operací žáci následně využívají například při sčítání přirozených čísel s přechodem přes základ 10 s použitím rozkladu jednoho sčítance na dvě čísla a grafického záznamu do desítkové tabulky (Blažková et al., 1992; Blažková, 2020; Šedivý & Křižalkovič, 1990):

$$8 + 6 = 8 + (2 + 4) = (8 + 2) + 4 = 10 + 4 = 14$$

●	●	●	●	●	●	●	●	●	●		
●	●	●	●								

Na obrázku 5 je ukázka z učebnice matematiky Blažkové et al. (2018) reprezentující využití **asociativního zákona pro sčítání** přirozených čísel s přechodem přes základ 10 prostřednictvím rozkladu druhého sčítance.



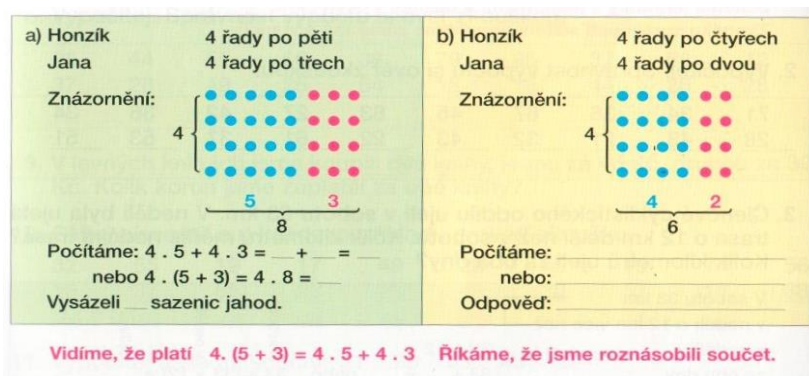
Obrázek 5. Využití asociativního zákona pro sčítání přirozených čísel (Blažková et al., 2018).

Při zavedení operace násobení a dělení přirozených čísel žáci objevují **vlastnosti relace dělitelnosti**. Zvládnou-li násobilku dvěma, zavádí se s pojmy sudá a lichá čísla, a v této souvislosti žáci **třídí** přirozená čísla v daném oboru do dvou skupin (tříd), což je generováno **relací ekvivalence** (dělitelnost dvěma). Později mohou žáci třídit přirozená čísla do dvou tříd, např. násobky tří a čísla, která nejsou násobky tří apod.

V souvislosti s násobením přirozených čísel si žáci osvojují a využívají znalosti distributivního zákona o násobení přirozených čísel vzhledem ke sčítání a využívají tohoto zákona například při pamětném násobení dvojčiferných a jednociferných čísel:

$$7 \cdot 23 = 7 \cdot (20 + 3) = 7 \cdot 20 + 7 \cdot 3 = 140 + 21 = 161$$

Na obrázku 6 je ukázka z učebnice matematiky Blažkové et al. (2018) reprezentující využití **distributivního zákona** pro násobení přirozených čísel vzhledem ke sčítání.



Obrázek 6. Využití distributivního zákona pro násobení přirozených čísel vzhledem ke sčítání (Blažková et al., 2018).

Nelze opomenout, že od samotného začátku a následně v průběhu výuky matematiky 1. stupně ZŠ žáci pracují s **výroky** (pravdivými i nepravdivými), které mají matematický obsah a využívajícími zavedenou matematickou symboliku:

$$5 + 8 = 13$$

$$4 \cdot 7 = 28$$

$$15 > 6$$

$$8 = 8$$

$$4 < 12$$

Paralelně s výroky žáci pracují s **výrokovými formami** jedné i více neznámých, které jsou propedeutikou navazujícího učiva o rovnicích:

$$3 + \square = 12$$

$$15 - 4 = \square$$

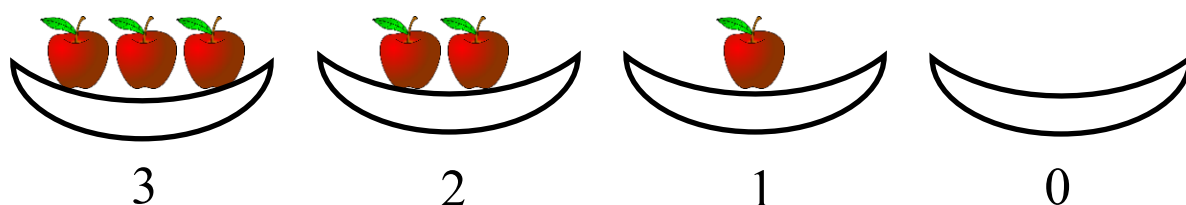
$$\square + \square = 11$$

$$6 \cdot \square = 18$$

$$\square \cdot \square = 24$$

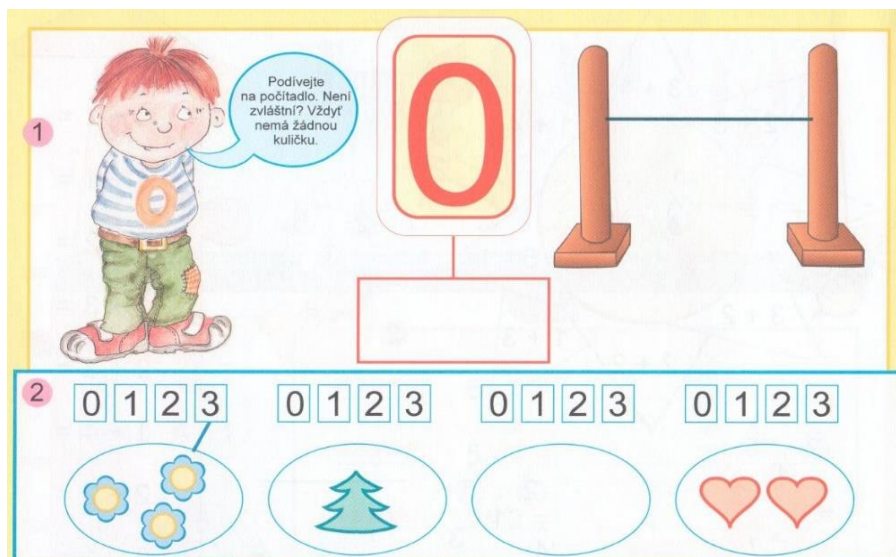
$$\square < 4$$

V kontextu všech výše zmíněných oblastí učiva matematiky 1. stupně ZŠ žáci pracují s **množinami**. Se samotným pojmem množina se v učivu matematiky na 1. stupni ZŠ nesetkáme, ale množiny jsou prostředkem, který žákům umožňuje pochopit probíranou látku a všechny algebraické operace jsou vyvozovány právě prostřednictvím množin (Blažková et al., 1992). Významným nástrojem pro zavedení čísla nula v učivu matematiky 1. stupně ZŠ je představa prázdné množiny (Panáčová, 2024, s. 158), jak je vidět na obrázku 7.



Obrázek 7. Zavedení čísla 0 jako kardinálního čísla prázdné množiny (Panáčová, 2024).

Vybranou ukázkou z učebnice matematiky Potůčkové (2018) na obrázku 8 lze ilustrovat zavedení čísla 0 jako kardinálního čísla prázdné množiny.

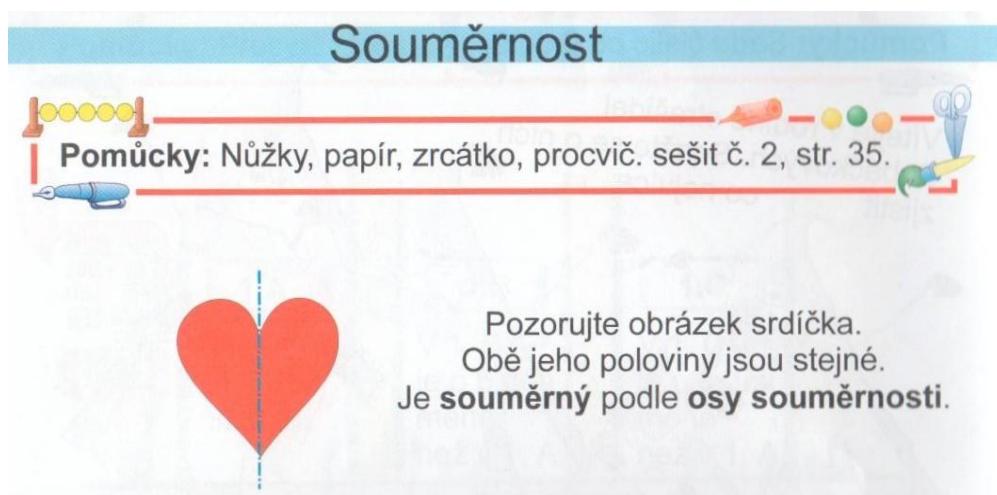


Obrázek 8. Zavedení čísla 0 v učebnici matematiky pro 1. ročník ZŠ (Potůčková, 2018).

V této souvislosti je tedy žádoucí, aby budoucí učitel 1. stupně ZŠ ovládal veškeré zmíněné pojmy včetně **základů výrokové logiky** a “intuitivní” **teorie množin**.

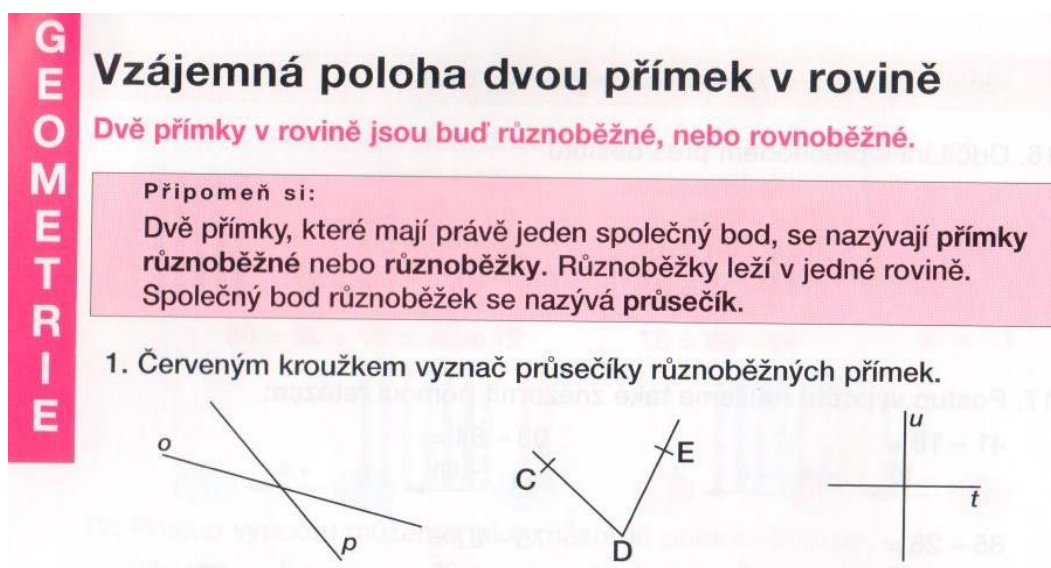
4. Souvislost mezi odbornými matematickými pojmy a učivem školské matematiky (geometrie)

V učivu geometrie 1. stupně ZŠ se žáci seznamují se základními geometrickými útvary, jejich vlastnostmi a učí se je rýsovat. Zároveň se u nich vytváří správné představy pojmů geometrických útvarů, s nimiž pracují. Žáci operují s rovinnými útvary – učí se rýsovat grafický součet, grafický rozdíl úseček a úhlů a grafický násobek přirozeného čísla a úsečky. Dále určují délku úsečky, obsah rovinného obrazce či objem tělesa, což je **zobrazení množiny geometrických útvarů do množiny všech reálných čísel**. Žáci 1. stupně ZŠ se dále seznamují s vybranými typy **shodných zobrazení**, mezi které patří osová a středová souměrnost. Ukázka osové souměrnosti z učebnice matematiky od Potůčkové (2012) je na obrázku 9.



Obrázek 9. Ukázka z učiva o osové souměrnosti v učebnici matematiky (Potůčková, 2012).

Pojem **průnik množin** je v geometrii interpretován jako průsečík dvou přímek, průsečík přímky a kružnice či průsečík dvou kružnic, s nimiž se žák 1. stupně ZŠ rovněž seznamuje. Na obrázku 10 je příklad průniku dvojic různoběžných přímek z učebnice matematiky Blažkové et al. (2018).



Obrázek 10. Průnik dvou množin jako průsečík dvou různoběžných přímek (Blažková et al., 2018).

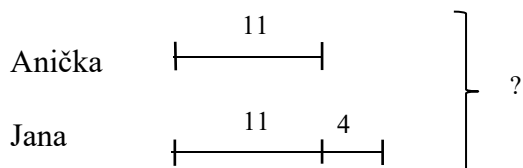
V učivu geometrie 1. stupně ZŠ žáci pracují se vztahy mezi geometrickými útvary, jedná se o **relaci v množině geometrických útvarů**. U následujících vybraných příkladů z geometrického učiva se žáci seznamují s vlastnostmi jednotlivých relací:

- přímka p je rovnoběžná/různoběžná s přímkou q ; $p \parallel q$,
- přímka p je kolmá na přímkou q ; $p \perp q$,
- úsečka AB je shodná s úsečkou CD ; $AB \cong CD$,
- úsečka AB je větší, resp. menší než úsečka CD ; $AB > CD$, resp. $AB < CD$,
- trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem KLM ; $\triangle ABC \cong \triangle KLM$,
- úhel AVB je větší/menší než úhel CUD ; $\sphericalangle AVB > \sphericalangle CUD$, resp. $\sphericalangle AVB < \sphericalangle CUD$,
- úhel AVB je shodný s úhlem CUD ; $\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle CUD$.

Grafický součet úseček nebo grafický násobek přirozeného čísla a úsečky v kontextu s vhodným grafickým znázorněním jednoduché i složené slovní úlohy je jedním z příkladů využití poznatků učiva geometrie v učivu aritmetiky. Názornost využití úsečkového modelu při řešení slovních úloh obsahujících vztahy „o n více/méně“ nebo „ n krát více/méně“ včetně úloh s antisignálem je ilustrována na příkladech 1, 2 a 3 níže (Blažková et al., 2011; Blažková, 2020; Budínová, 2018; Divíšek et al., 1989).

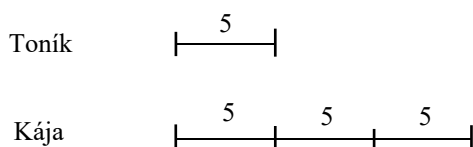
Příklad 1: *Anička má 11 pastelek, což je o 4 pastelky méně než má Jana. Kolik pastelek mají obě dívky dohromady?*

Znázornění:

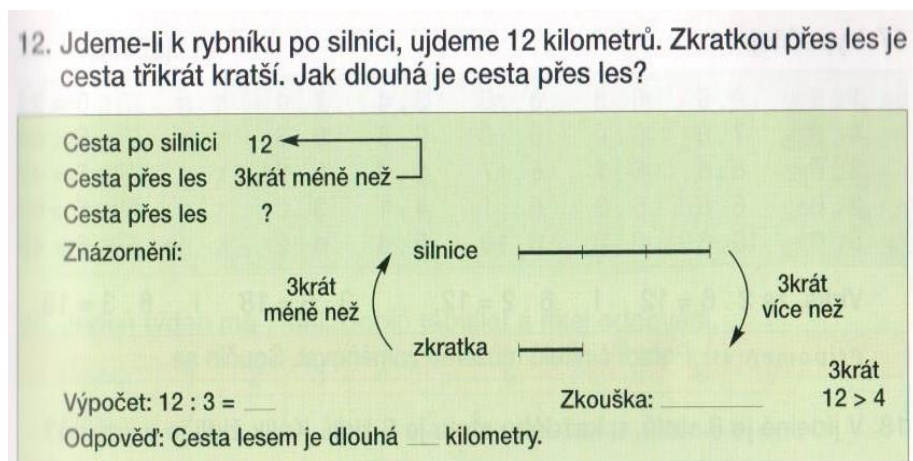


Příklad 2: *Toník má 5 pastelek, Kája má třikrát více pastelek než Toník. Kolik pastelek má Kája?*

Znázornění:



Obrázek 11 ilustruje využití úsečkového modelu představujícího grafický součet úseček při řešení jednoduché slovní úlohy v ukázce z učebnice matematiky Blažkové et al. (2018).

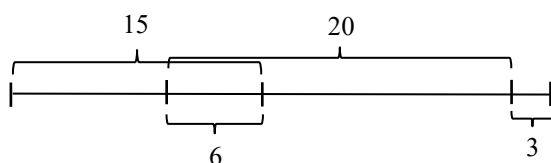


Obrázek 11. Využití grafického součtu úseček při grafickém znázornění zadání slovní úlohy (Blažková et al., 2018)

Vhodné je tohoto grafického modelu využít pro větší názornost ve slovních úlohách typu sjednocení množin s neprázdným průnikem (Divíšek, 1989; Blažková et al., 2011):

Příklad 3: Ve třídě je 15 dětí, které chodí do sportovního kroužku a 20 dětí, které chodí do počítačového kroužku, z toho 6 dětí chodí do obou kroužků. Kolik je ve třídě dětí, víme-li, že 3 děti nechodí do žádného z těchto kroužků?

Znázornění:



5. Závěr

Tento příspěvek ilustruje na konkrétních vybraných příkladech učiva odborných matematických předmětů jejich úzké propojení a vzájemnou návaznost se školskou matematikou 1. stupně ZŠ. Upozorňuje na skutečnost, že odborná příprava studentů učitelství matematiky 1. stupně ZŠ v tomto oboru je klíčovým předpokladem ke kvalitní učitelské způsobilosti v rámci výuky školské matematiky. Studenti v rámci odborné matematické přípravy získávají nadhled nad učivem matematiky 1. stupně ZŠ, který je pro jejich profesi významný. Veškeré výše popsané znalosti, které studenti získají prostřednictvím odborných matematických předmětů v rámci své přípravy na profesi budoucího učitele 1. stupně ZŠ, přispívají k rozvoji jejich profesních kvalit.

Studenti učitelství 1. stupně ZŠ rozvíjí na základě odborných matematických předmětů, v nichž je učivo budováno s přísnou návazností (nové učivo vyplývá z předcházejícího) své logické uvažování, kterým získávají větší schopnost pro správné a přesné vyjadřování, které je v matematice žádoucí. Tyto faktory následně umožňují budoucím učitelům rozvíjet potřebné schopnosti argumentace, kultivovanosti ve slovním vyjadřování, kritického myšlení, systematickosti a tvořivosti v celém systému vysokoškolské přípravy.

Na základě těchto znalostí, dovedností a schopností pak může budoucí učitel profesionálněji a kreativněji volit vlastní formy výuky matematiky. Sám učitel je pak svobodnější při výběru vhodných metod výuky a jejich využití včetně různých alternativních přístupů, které se v dnešní době v českém školství objevují.

Literatura

- Blažková, R., Matoušková, K. & Vaňurová, M. (1992). *Texty k didaktice matematiky pro studium učitelství 1. stupně základní školy. 2. část*. Brno: PdF MU.
- Blažková, R., Matoušková, K. & Vaňurová, M. (2011). *Kapitoly z didaktiky matematiky: slovní úlohy, projekty*. Brno: PdF MU.
- Blažková, R., Matoušková, K. & Vaňurová, M. (2018). *Matematika pro 3. ročník ZŠ*. Všeň: Alter.
- Blažková, R. (2020). *Didaktika matematiky se zaměřením na specifické poruchy učení*. Brno: Munipress.
- Budínová, I. (2018). *Přístupy nadaných žáků 1. a 2. stupně základní školy k řešení některých typů úloh v matematice*. Brno: Munipress.
- Bulín, J., Korityák, S., Palková, M., Skříčková, M., Synková, P., Tarábková, M. & Vance, K. (2007). *Matematika pro 2. ročník základní školy*. Brno: Didaktis.
- Coufalová, J. (2016). *Matematika s didaktikou pro 1. ročník učitelství 1. stupně ZŠ*. Plzeň: Západočeská univerzita.
- Divíšek, J. & Buřil, Z. (1989). *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. Praha: SPN.
- Fuchs, E., Lišková, H. & Zelendová, E. (2015). *Rozvoj předmatematických představ dětí předškolního věku. Metodický průvodce*. Praha: JČMF.
- Hejný, M., Benešová, M., Bereková, H., Bero, P., Hrdina, L., Repáš, V., & Vantuch, J. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.
- Kaslová, M. (2012). *Předmatematické činnosti v předškolním vzdělávání*. Praha: Raabe.
- Novák, B. & Eberová, J. (1988). *Kapitoly z didaktiky matematiky I*. Olomouc: Pedagogická fakulta Univerzity Palackého.
- Panáčová, J., & Beránek, J. (2021). *Základy elementární matematiky s didaktikou pro učitelství 1. stupně ZŠ*. Brno: Masarykova univerzita.
- Panáčová, J. (2024). Mylné představy o nule u studentů učitelství 1. stupně ZŠ. *Učitel matematiky*. 32(2), pp. 154–171.
- Potůčková, J. (2012). *Matematika pro 2. ročník základní školy. 2. díl*. Brno: Studio 1+1.
- Potůčková, J. (2018). *Matematika pro 1. ročník základní školy. 1. díl*. Brno: Studio 1+1.
- Šedivý, O. & Křižalkovič, K. (1990). *Didaktika matematiky pre štúdium učiteľstva 1. stupňa ZŠ*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

DEVELOPMENT OF FINE MOTOR SKILLS IN PRIMARY SCHOOL STUDENTS THROUGH HEJNY METHOD IN TEACHING MATHEMATICS

Václav TVARUŽKA, Barbora TRÍSKALOVÁ, Ladislav RUDOLF, Tomáš BAROT
University of Ostrava, Faculty of Education (Czech Republic)
Vaclav.Tvaruzka@osu.cz, D20314@student.osu.cz, Ladislav.Rudolf@osu.cz,
Tomas.Barot@osu.cz

Abstract

This study deals with the influence of innovative mathematics teaching according to the Hejny method on the development of fine motor skills of 1st-grade primary school pupils. The intervention program was implemented through creative lessons that used manipulative and spatial tools (e.g. geodesics, building blocks and cube models). Fine motor skills were diagnosed using the subtest “Composing and carrying beads” from the standardized MABC-2 test. The results showed a statistically significant shift in fine motor skills in pupils taught using the Hejny method compared to the control group with traditional teaching. The research pointed out the importance of practical activities as a tool to support not only motor, but also cognitive and spatial development of children. The starting points of this work can serve as inspiration for pedagogical practice in the field of primary education.

Keywords: fine motor skills, Hejny method, mathematics teaching, work activities, spatial imagination, manipulative tools

1. Introduction

The development of fine motor skills is an important aspect of a child's school readiness and significantly influences their success in writing, drawing, and manipulating learning materials. Fine motor skills are closely linked to other areas of development, especially spatial perception and cognitive skills, which are essential for mastering mathematical concepts.

Hejny's method of teaching mathematics is currently considered one of the progressive forms of teaching, which uses a manipulative environment and emphasizes the student's independent work. Children are not passive recipients of knowledge, but become active constructors of their knowledge, through work with specific objects, models and spatial structures. This approach significantly contributes to the comprehensive development of the child, as it connects movement, perception and thinking.

This study aimed to determine whether and how teaching mathematics using the Hejny method – in combination with practical activities, supports the development of fine motor skills. The research was conducted in two fourth grades, where one group was taught traditionally and the other according to the Hejny method, both of which received three structured lessons focused on manipulation and creation.

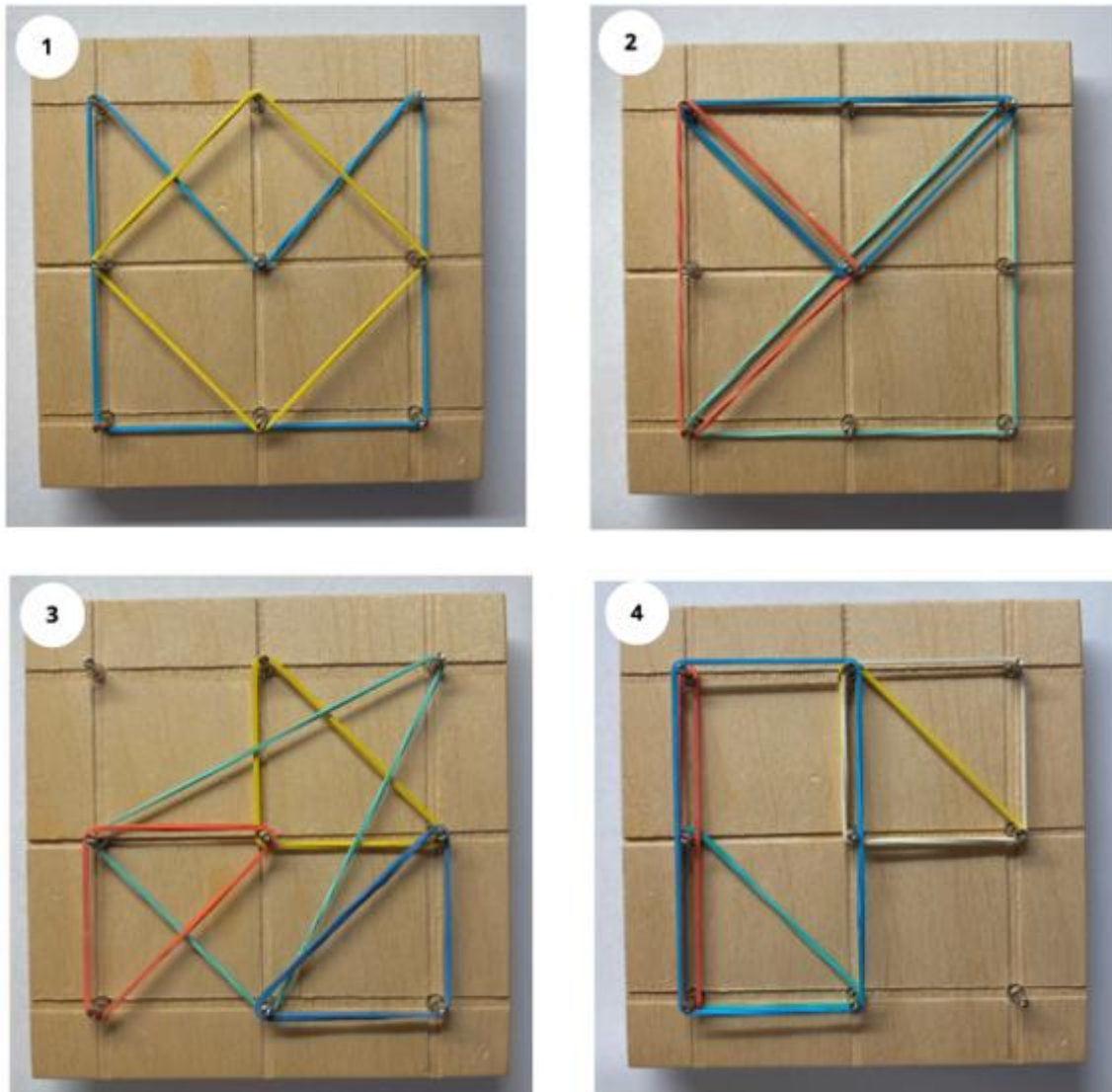
2. Theoretical foundations

2.1. Fine motor skills and their importance

Fine motor skills include coordinated movements of small muscle groups, especially fingers and hands, which are necessary for everyday activities such as writing, cutting, threading or folding. Its development is tied to the maturation of the central nervous system (Dylevský, 2022) and is reflected in overall dexterity, accuracy, and control of movements. The importance of fine motor skills for a child's school success is also confirmed by Psotta (2016) and Bednářová (2022), who emphasize its influence on graphomotor skills, concentration and speech development.

2.2. Hejny's method in teaching mathematics

Hejny's method of teaching mathematics is based on the principles of constructivism and respects the individual developmental pace of the student. An important part of this method is working with so-called environments, such as stairs, geodes, cubic structures, or number lines, which allow students to independently discover mathematical relationships (Hejny et al., 2011). Manipulating these environments also stimulates fine motor skills and spatial perception.



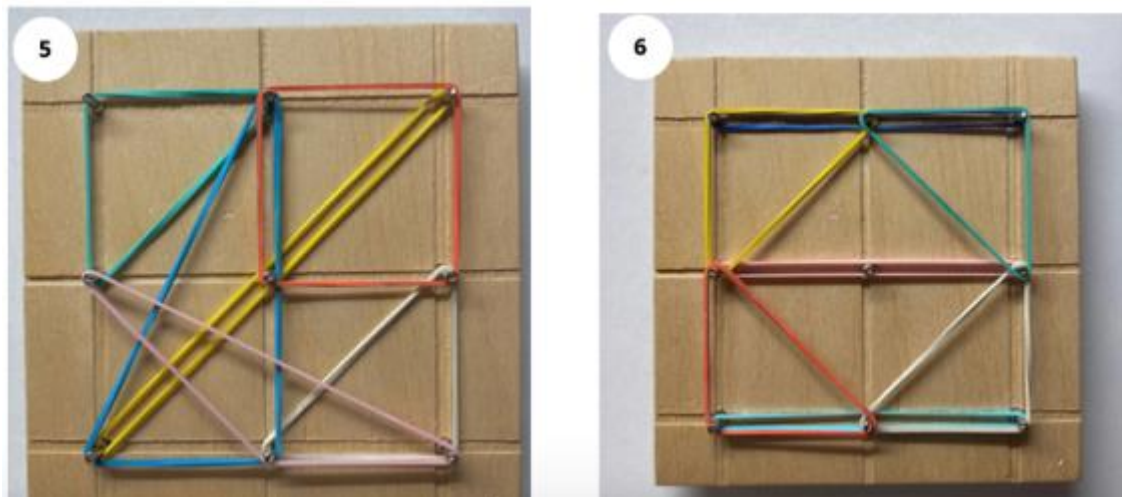


Figure 1. Geodesic input

As gradation parameters, we can mainly find the number of rubber bands, the increasing color of the rubber bands, the amount of overlapping (layers), and the complexity of the shapes.

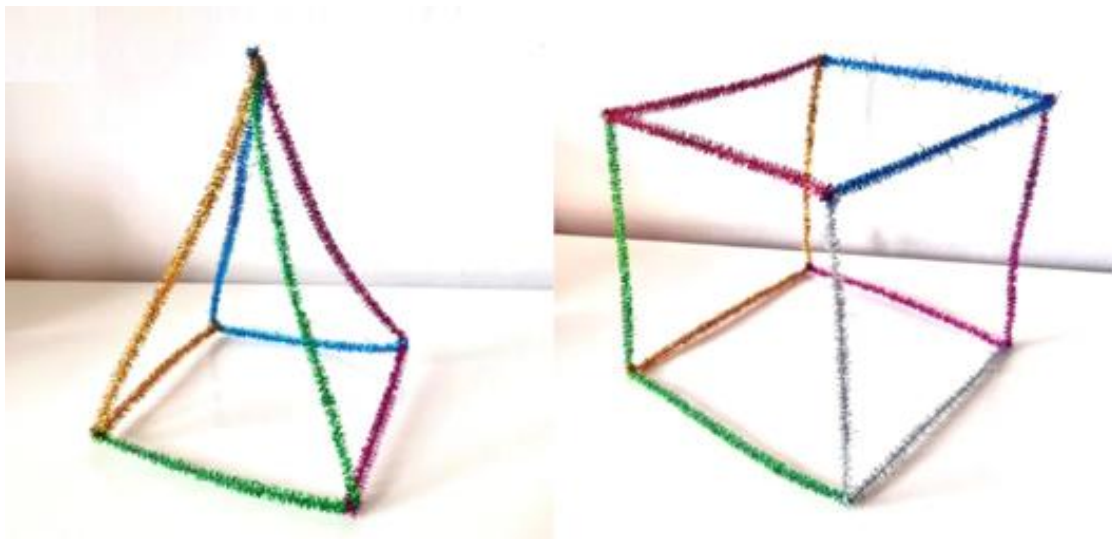


Figure 2. Entering shapes and solids

Gradation in the assignment appears in the form of the assignment, in the complexity of the shape and later the solid, in the addition of conditions in working with beads.

2.3. The importance of practical activities in teaching

Practical activities that use small objects, creative tasks, and spatial manipulations naturally strengthen hand-eye coordination, precision of grasp, and motor planning. Their inclusion in teaching creates favourable conditions not only for the acquisition of knowledge but also for the development of self-confidence, concentration, and joy of learning (Bednářová, 2022; Mertin, 2011).

3. Methodology

The research sample consisted of students from two fourth grades ($n = 37$) – one class was taught in the traditional way ($n = 19$), the other using the Hejny method ($n = 18$). The subtest “Putting and carrying beads” from the MABC-2 test was used to assess fine motor skills. The intervention program included three creative lessons with mathematical content:

- **Lesson 1:** Working with geodesics – creating shapes according to the assignment.
- **Lesson 2:** Assembling geometric shapes and bodies from various materials.
- **Lesson 3:** Building 3D models from cubes according to the template.

Before and after the intervention, students were tested, and the results were subsequently analysed with a two-sample t-test.

4. Results

Statistical analysis showed that students from the experimental group (Hejny method) achieved significant improvement in fine motor skills between pretest and posttest ($p < 0.05$), while in the traditionally taught group, this progress was not as significant. In tasks focused on accuracy and coordination, the experimental group was more successful, which indicates a positive effect of manipulation with didactic tools on motor development.

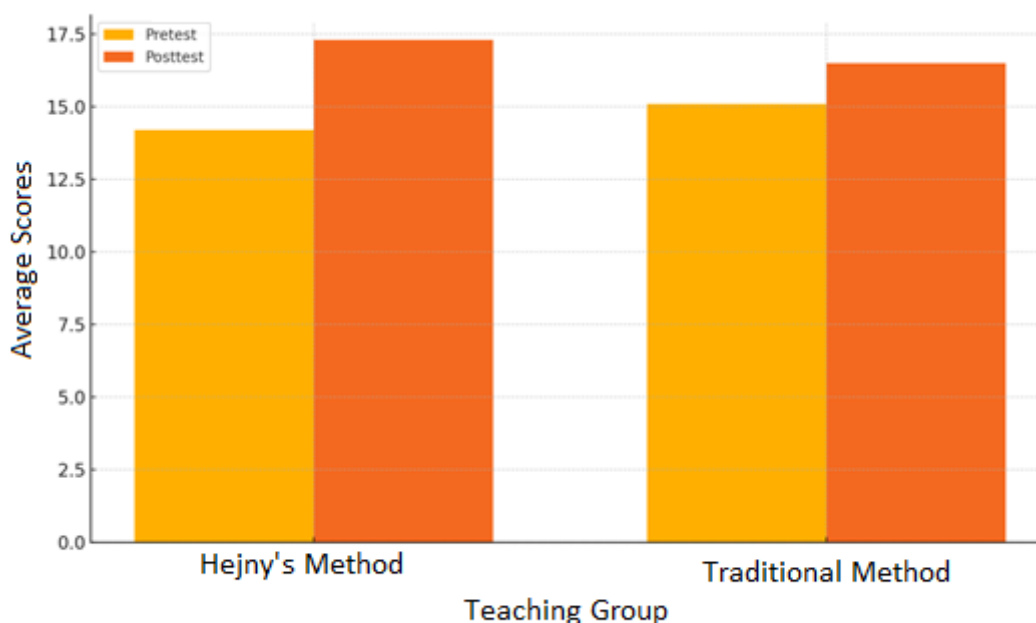


Chart 1. Comparison of Pretest and Posttest

5. Discussion

The results confirm that teaching that combines practical activities with mathematics has a positive impact not only on the cognitive but also on the motor development of children. Manipulating spatial objects, creating patterns, and solving problems based on concrete experience led to better activation of students, the development of their fine motor skills, and a deeper understanding of mathematical concepts.

Motivation is also an important factor: students showed greater engagement, perseverance, and cooperation during practical activities. The results are consistent with research that emphasizes the importance of multisensory learning and active student engagement (Bednářová, 2022; Saccà, 2024). Appropriately structured practical activities can also serve as a preventive and supportive tool for students with graphomotor difficulties.

6. Conclusion

Research has shown that mathematics teaching implemented using the Hejny method, enriched with practical activities, has a significant impact on the development of fine motor skills in younger school-age students. Given that fine motor skills affect not only writing, but also spatial imagination, attention and overall school performance, its targeted development is a desirable part of teaching.

Pedagogical practice should therefore strive to systematically incorporate manipulative activities into teaching, especially in subjects such as mathematics, work activities or primary school. Interdisciplinary connections are also suitable, allowing children to learn through movement, creativity and play.

Acknowledgements

This study was supported by the REFRESH project: CZ.10.03.01/00/22_003/0000048.

References

- Bednářová, J. (2022). *Rozvoj grafomotoriky*. Brno: Edika,
- Dylevský, I. (2022). *Základy funkční anatomie*. Praha: Grada.
- Hejný, M. et al. (2011). *Hledání cest k porozumění matematice*. Plzeň: Fraus.
- Mertin, V. (2011). *Jak vést děti ke spokojenému životu*. Praha: Portál.
- Psotta, R. (2016). *Motorický vývoj a motorické testy v tělesné výchově*. Olomouc: UPOL.
- Saccà, A. (2024). *Tělo a pohyb v předškolním věku*. Praha: Portál.

THE RELATIONSHIP BETWEEN ELEMENTARY SCHOOL STUDENT'S AGE AND INTEREST IN LEARNING MATHEMATICS CONTENT

Slaviša JENJIĆ¹, Andrea ĐUKIĆ²

¹University of Banja Luka, Faculty of Philosophy (Republika of Srpska, B&H)

²Elementary School "Dositej Obradović" Banja Luka (Republika of Srpska, B&H)
slavisa.jenjac@ff.unibl.org, andreadjukic@yahoo.com

Abstract

Student success in learning and understanding mathematical content in elementary school is determined by numerous factors. Among these factors is the student's interest in learning mathematical content. Learning success often changes with the development of student's psycho-physical characteristics. The authors researched and present in this paper the results related to the relationship between elementary school student's age and their interest in learning mathematics content. The main hypothesis was set: We expect that students have different interests in learning elementary school mathematics content and that these interests correlate with student's age. The mathematical content covered includes: addition and subtraction; equations and inequalities; geometric content; word problems; measures and measurements. Various interests were recorded, with students finding content about measures and measurements the least interesting, while showing the greatest interest in solving equations and inequalities. A correlation between age and student's interest in mathematical content was also observed, with older students showing greater interest in mathematics.

The obtained results imply that it is necessary to seek different methods and work strategies to make all educational content equally or nearly equally interesting to students. At the same time, the authors suggest that for less interesting content, higher quality teaching media should be provided, and different teaching systems, project-based and environmental teaching should be applied.

Keywords: student's age, mathematical content, student interests

1. Introduction

Mathematics as a fundamental educational discipline occupies a central place in the curricula of elementary school. However, student's interests in mathematics are not homogeneous but vary depending on numerous factors, among which age proves to be an important one, and this should be further investigated in the future. Understanding the relationship between elementary school student's age (from 1st to 4th grade) and their interest in learning mathematical content can improve teaching practice. Since not all students have the same interests, teaching should not insist only on learning mathematical content; the content is a means by which thinking, attention, and intellectual development are developed. Therefore, the goal of teaching is not exclusively the acquisition of

The paper presents unpublished and previously uninterpreted results from a broader and more extensive research project conducted as part of the master's thesis titled "Methods of Learning Mathematical Content from the Perspective of Elementary School Students" by candidate Andrea Đukić. The thesis was defended at the Faculty of Philosophy, University of Banja Luka, on September 30, 2024.

knowledge but also the encouragement and development of abilities for independent learning, the development of critical and creative thinking, cognitive and metacognitive abilities (Mihajlović, Skopljak, and Jenjić, 2023). This understanding creates the conditions for the development of differentiated motivation strategies in accordance with the developmental characteristics of children.

Analysis and research of the relationship between student's age and interest in learning mathematics require knowledge of the developmental specificities of younger school-age students. Elementary school students are between 6 and 10 years old, which is a period of childhood characterized by the development of cognitive, emotional, and social traits. According to Piaget's theory of cognitive development, students of this age transition from the preoperational to the concrete operational phase of thinking, which means they increasingly understand logical relationships but are still tied to concrete situations and perceptual elements (Piaget, 1952). This is the stage of concrete operations, characterized by the way they perceive mathematical concepts.

In the younger grades, students are more curious and open to adopting new content, but motivation oscillates depending on the teacher's methodological approach, the complexity of the teaching content, and learning experiences. First and second-grade students, for example, often show high initial motivation for learning mathematics, which is associated with game-like activities and research tasks (Stipek, 2002). However, as age increases and the teaching content becomes more abstract, interest may decline. "Given the nature of mathematical content in elementary school, the importance of the active role of students and the willingness of teachers to encourage their mutual assistance is emphasized (Jenjić and Skopljak, 2023: 142). To avoid a downward trend in interest in learning mathematical content, the needs and abilities of students should be monitored.

Interest in a particular area can be defined as a relatively stable tendency to direct attention and activity towards specific content, and in the school context, it is closely related to the concepts of motivation, engagement, and achievement. Research shows that interest in mathematics among younger students declines not only due to cognitive challenges but also due to changes in student's perception of their own competence and the importance of the subject (Wigfield & Eccles, 2000). Interest is interpreted as the tendency of the subject to react positively to certain phenomena or objects in their environment and to direct their activity towards them (Encyclopedic Dictionary of Pedagogy, 1963).

In the first and second grades, students often experience mathematics as a game, a challenge, and something that encourages them to "think." Game-like teaching often appears in teaching practice. However, in later grades, the teaching content becomes more abstract (e.g., all four arithmetic operations, geometric concepts, fractions, more complex tasks), and interest may decrease in students who do not have developed learning strategies or who experience failure. Also, at this age, children begin to form more stable self-images. If they have previously formed negative experiences with mathematics, they may develop attitudes that will diminish the desire for further learning.

There has been research examining the links between the socio-pedagogical characteristics of students and their interests and achievements in mathematics teaching. For example, some research indicates that girls in the third and fourth grades more often express doubt in their mathematical abilities, despite the same or even better achievements compared to boys (Hyde et al., 2008). Yet, it is a fact that teachers play a key role in improving student's interest in mathematics. Their methodological competence contributes to better teaching quality, the application of modern digital technologies, or simply, the planning, preparation, and realization of teaching. The use of concrete materials, visualization of abstract concepts, problem-based learning, and play as a didactic method

have the potential to maintain and develop interest in mathematics throughout the entire classroom period (Boaler, 2016).

Teachers, as the most important factor in the preparation and realization of teaching, should recognize changes in student's interest. If they recognize a decline in interest, they will intervene preventively, in all grades and when covering all teaching topics. Early detection of a decline in interest enables the timely design of differentiated activities, which include various social forms of work, project-based and problem-based teaching, digital and other tools. Modern teaching strategies and teaching systems will certainly raise interest to a higher level. The application of appropriate strategies aims to develop interest in learning, as well as optimism in work and problem-solving. "Optimism is a predictor of academic success" (Goleman, 2008: 84). Burdening students with complex and overly difficult tasks reduces interest and optimism in work.

2. Method

In elementary school mathematics, students have varying success in terms of achieved results and grades. Possible reasons include the fact that they have different predispositions for learning, less or more motivation for learning, better or worse conditions for learning and work. The aim of this research is to investigate the relationship between elementary school student's age and interest in learning mathematics content. Accordingly, the research hypothesis was defined: We expect that students have different interests in learning elementary school mathematics content and that these interests correlate with student's age.

A descriptive (survey) research method was used. The research technique is surveying/scaling, and a survey questionnaire was created as the research instrument. It contained 24 items, and students expressed their level of agreement on a four-point scale: 1) I completely agree, 2) I partially agree, 3) I agree very little, and 4) I do not agree. The sample consists of third, fourth, and fifth-grade elementary school students from three different elementary schools in the city of Banja Luka in the Republic of Srpska (B&H). The independent variable of the research is age, specifically the grade of the students (third, fourth, and fifth). The dependent variables are the learning content in elementary school mathematics, divided into five categories: equations and inequalities, addition and subtraction, word problems, geometric content, measures and measurements. The research was conducted in the second semester of the 2023/2024 school year. Statistical data processing required the application of descriptive statistics and Pearson's correlation coefficient.

3. Research results and their interpretation

Student's interest in learning mathematical content is determined by various factors. These factors include, among others, predispositions for learning and understanding mathematics, the material and technical basis of teaching, environmental factors, the teacher's methodological approach in working with children, etc. It should also be added that interest in learning changes with student's age. Some students will, over time, prefer social sciences, some focus on natural sciences, arts, and some students will gradually develop a desire for more successful learning of mathematical content. Precisely for this reason, we conducted the research among students in three different grades, which is clearly visible in Table 1.

Table 1. Sample of respondents by student's age

	Frequency	Percentage	Cumulative percentage
Third grade	68	33.7	33.7
Fourth grade	67	33.2	66.8
Fifth grade	67	33.2	100.0
Total	202	100.0	

The sample of respondents is approximately uniform by age. There were 68 third-grade students, which is 33.7% of the respondents. Also, 67 or 33.2% of students who attended the fourth grade participated in the research. The same number represents the students who are in the fifth grade. Thus, a total of 202 students were included in the research. Younger students did not participate in the research. Most of the teaching content, which is the dependent variable of this research, has not yet been covered by first and second-grade students, so they could not be included in the research. In the research, we included five different thematic units that are covered in mathematics teaching: equations and inequalities, addition and subtraction, word problems, geometric problems, measures and measurements. We did not include multiplication and division, as well as fractions, because these contents are not taught in the third grade of elementary school, so third-grade students cannot comment on these contents. Table 2 shows the arithmetic means of the answers related to student's interest in learning the listed thematic units. Since students expressed their level of agreement with the answers on a scale from 1 to 4, where 1 is the best and 4 is the worst value, the arithmetic means shown in the following table indicate the level of student's interest.

Table 2. Interest in learning mathematics content

	Sample	Min.	Max	Arithmetic Mean
Equations and inequalities	202	1	4	1.71
Addition and subtraction	202	1	4	1.74
Word problems	202	1	4	1.91
Geometric connect	202	1	4	1.97
Measures and measurements	202	1	4	2.15
(N)	202			

Students show the least interest in learning the subject area of Measures and Measurements. The obtained arithmetic mean is $M = 2.15$, and this is the worst result from the perspective of interest in a specific mathematical content. The research did not seek the reasons for this, but it is possible that this unit receives less time compared to all others, there are fewer classes in the curricula, and it includes various quantities: length, area, mass, time, and volume. Experience shows that this is complex content for students, also because students convert smaller to larger and larger to smaller units of measurement (for example, centimeters to decimeters and meters, decagrams to grams and kilograms, and so on). However, even so, this is content that students need to master because they will use it in everyday life.

Students also do not show great interest in geometric content. The arithmetic mean $M = 1.97$ suggests that students do not find this interesting, despite the fact that there is more interest here than in the previous variable. However, geometric content still occupies more time in mathematics teaching. The curriculum is designed so that geometric content is not taught continuously. Much time is spent on arithmetic and algebraic content, and geometry is taught in certain time intervals, which is not particularly interesting to students. Hypothetically speaking, it can be said that students mainly perceive mathematics as arithmetic operations, which suppresses interest in geometry and geometric tasks. However, this is just a hypothesis whose validity should be verified by research.

There is slightly more interest in solving word problems. The arithmetic mean of the answers obtained from students $M = 1.91$ describes this. Here we can note an average partial interest of students, and the reasons for this can be found in the fact that these are more complex tasks that require greater mental activity, more effort, and slower feedback on whether the task was solved correctly or not. The verification of whether they solved correctly is usually done by the teacher, and in a smaller number of cases, students themselves can check whether the procedure and solution are correct. This somehow reduces the interest in work and at the same time shows the importance of feedback for students. It should also be noted here that word problems, unlike mathematical expressions, encourage the development of divergent and mathematical thinking more. Therefore, work should be done to develop student's interest in solving word problems in elementary school mathematics.

Addition and subtraction is an area in elementary school mathematics that students spend a lot of time on. Namely, they start with addition and subtraction when forming the concept of a natural number. Therefore, they show a higher level of interest in these arithmetic operations. This is confirmed by the value of the arithmetic mean $M = 1.74$. It should also be emphasized that they use these operations in all other areas of work – in word problems, measures and measurements, equations and inequalities. It is concluded that the content of addition and subtraction is more interesting to students precisely because of the continuity in work. Because if geometric contents are less interesting due to discontinuity in teaching, addition and subtraction are more interesting due to continuous application. Students add and subtract daily, in class or in extracurricular activities.

It is interesting that students are most interested in content related to solving equations and inequalities. The obtained value $M = 1.71$ confirms this statement. We cannot give an adequate interpretation of the real reasons for this because we did not set this as a task in the research. Or rather, we did not expect this. Precisely because of this, this can be an interesting problem for some future research. However, the fact is that solving equations and inequalities acts as a motivation for learning because each word problem that is solved by equations or inequalities is a new problem situation that creates interest in finding a solution.

Further analysis of the obtained results is focused on checking the correlation between student's age and their interest in learning all mathematical content. For this purpose, Pearson's correlation coefficient was applied. The interest in learning mathematical content represents the obtained score of several items that related to interest in learning mathematics. The obtained correlations are presented in Table 3.

Table 3. Correlations of student's age and interest in learning mathematics

	Grade	Interest in learning all mathematics content
Grade	Pearson Correlation	1
	Sig. (2-tailed)	
	N	202
Interest in learning all mathematics content	Pearson Correlation	.426**
	Sig. (2-tailed)	.000
	N	202

** . Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

The correlations between student's age, or the grade students attend, and interest in learning mathematical content have a value of $r = 0.426$ and are statistically significant at the level of $p = 0.000$. This means that interest in learning mathematical content increases with student's age. Since the research included students from the third, fourth, and fifth grades, this result does not mean that older students have better learning success. Namely, our finding is that older students better understand the importance of learning mathematics, and on the other hand, mathematics with its thematic units is probably more interesting in older grades. Students have mastered the basic arithmetic operations, geometry content, measurement, and other content, and in older age, they learn mathematics more to apply what they have learned in different situations. In any case, this should be checked in the next period. However, to obtain more valid results, research should be created and conducted that will include younger students, specifically from the first to the fifth grade.

4. Concluding remarks

The conducted research confirmed the hypothesis that students have different interests in learning elementary school mathematics content and that these interests correlate with student's age. It was noted that solving equations and inequalities is most interesting to students in elementary school mathematics. In second place of interest is content related to addition and subtraction, and students show insignificantly less interest in solving word problems. More experienced teachers generally claim, and our research has confirmed, that learning geometric concepts is less interesting to students. And finally, students show the least interest in content related to measures and measurements in elementary school mathematics. Further analysis of the obtained data in the research recorded a correlation between student's age and interest in learning all mathematical content. It was found that older students have a greater interest in learning mathematics. It is possible that this result is a consequence of a better understanding of mathematics in older age, or more specifically, mathematics is more complex for students in the younger grades of elementary school. Students need a quality methodological interpretation of mathematical concepts to understand its basics, and this happens at a younger age. Later, mathematics is more demanding but builds on the foundations from the first three grades of elementary school.

The obtained results are certainly interesting and open up some new questions for research in the methodology of elementary school mathematics. Therefore, future research should seek and find better approaches in the treatment of geometric content and measures and measurements. However, this cannot be learned by survey or descriptive research, but by experimental research with the introduction of an experimental factor in learning the mentioned thematic units. Also, in the future, a comparative study should be conducted to

learn about the content of mathematics learning in some European countries, and possibly the interest in mathematics among students in those countries. The obtained results would have great value in creating and aligning curricula, both because of learning outcomes and because of the mobility and migration of students.

References

- Boaler, J. (2016). *Mathematical Mindsets: Unleashing Student's Potential through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching*. Jossey-Bass.
- Enciklopedijski rječnik pedagogije* (1963). Zagreb: Matica Hrvatska.
- Goleman, D. (2008). *Emocionalna inteligencija*. Beograd: Geopolitika.
- Hyde, J. S., Lindberg, S. M., Linn, M. C., Ellis, A. B., & Williams, C. C. (2008). Gender similarities characterize math performance. *Science*, 321(5888), 494–495.
- Jenjić, S., & Skopljak, M. (2023). *Metodičko oblikovanje matematičkih sadržaja u razrednoj nastavi*. JP „Zavod za udžbenike i nastavna sredstva“ a.d. Istočno Novo Sarajevo.
- Mihajlović, T., Skopljak, M., & Jenjić, S. (2023). Osposobljenost učenika za samostalno učenje matematike. *DHS-Društvene i humanističke studije, časopis Filozofskog fakulteta u Tuzli, Vol. 24, No. 3, 2023*. doi:10.51558/2490-3647.2023.8.1.525, 551-572. <https://C:/Users/Korisnik/Downloads/12141-66732-1-SM.pdf>
- Piaget, J. (1952). *The Origins of Intelligence in Children*. New York: International Universities Press.
- Stipek, D. (2002). *Motivation to Learn: Integrating Theory and Practice*. Allyn & Bacon.
- Wigfield, A., & Eccles, J. S. (2000). Expectancy–value theory of achievement motivation. *Contemporary Educational Psychology*, 25(1), 68–81.

THE NECESSARY CONTRIBUTION OF USING INTERDISCIPLINARITY IN INITIAL TRAINING OF MATHEMATICS FUTURE TEACHERS TO PROMOTE KNOWLEDGE AND INTEGRATION OF PEDAGOGICAL PERSPECTIVES TO BE USED PERCEPTIONS FOR THE REQUIRED STUDENTS LEARNING

Ana HENRIQUES

Universidade de Lisboa, Instituto de Educação (Portugal)
achenriques@ie.ulisboa.pt

Abstract

The necessary innovation of interdisciplinarity practices in education contemporary, to provide the successful development of students in learning salient of curriculum documents, it is essential this effective use of diagnostic and guidance carried out in the prospective teachers (PTs) initial training experience of Mathematics Didactics and Curriculum Assessment of the basic and secondary education.

To provide them with pedagogical knowledge for the convenience of the nature and learning process used in future teaching practices, as it is recognized that they were not yet all familiar with this comprehensive perception of the positive contribution in the use of their knowledge, this qualitative and interpretative study is focuses on the perceptions of the future teachers in the work carried out to prepare interdisciplinarity professional knowledge in teacher training, aiming to understand they perceptions about how the positive the positive interdisciplinarity adopted work used by PTS in training program contribute to their necessary development of pedagogical knowledge effect when elaborate detailed lesson plans integrating pedagogy to possible use in their future professional practice.

The results of this study, based on data analysis and their reflections and work used, revealed a recognized relevance of using interdisciplinarity in the preparation of PTS in initial teaching training, showing their deepened, taking advantage to improve pedagogical knowledge, which they intend to use in their future practices. So, this study is relevant and may contribute to identifying the effectiveness evidence of successful learning of interdisciplinarity use in the preparation of professional knowledge of future teachers, for necessary international professional development in future docents teaching practices.

Keywords: interdisciplinarity promotion in initial training education; science and Mathematics prospective teachers; learning and teaching pedagogical knowledge; planning class lessons of students.

1. Introduction

Recently, the use of interdisciplinarity has been recommended as essential to successfully develop in education school of students integrated learning, to help them to attribute meaning to modern Science and mathematics ideas, as fundamental component of human culture in international school curricular guidelines in primary and secondary education (ME, 2018), to dealing with life contexts (NCTM, 2014; Lygianne & Geraldo, 2020). To answer to these demands, it is important that in this century prospective teachers can create and implement learning components of objectives, learning content and teaching methods environments that

take advantage of the wide accessibility and potential to explore interdisciplinarity ideas to use in teaching practices as they are not yet familiarized. Thus, the future Teachers Training for Sustainability is currently a required trending topic, due to the need to provide educational support knowledge on the different issues covered by the Sustainable Development Goals. To reach this goal, this author have investigated the integration of interdisciplinarity and also emphasize as necessary that the initial training programs foster the development of the interdisciplinarity of prospective teachers, helping them to acquire experience to teach the effective help of their future practices. Within this context, preservice teachers have collaborative opportunities to: plan, organize, criticize, and develop abstract ideas from specific content and needs of the student and specific classroom situations, while considering the possibilities of digital technologies (Niess, 2012). In this considered essential regard context, it was pertinent to carry out this qualitative and interpretative study to contribute to the scarce research in this field, by describing an innovative science and mathematics preservice teachers education experience from the 3rd cycle of basic and secondary education in Portugal, whose aim is: to understand they perceptions about how the the positive interdisciplinarity adopted work used by PTS in training program contribute to their necessary development of pedagogical knowledge effect when elaborate detailed lesson plans integrating pedagogy to possible use in their future professional practices. Thus, this considered relevant study, may contribute to identifying the recommendations and considerations on the potential of innovative and specific adopted work of using interdisciplinarity development in the initial training experience of future Mathematics Didactics and Curriculum Assessment teachers of the basic and secondary education pedagogical aspects, as useful for their showing necessary encouragement and support for professional development of planning classes when they become familiar with this approach, to improve pedagogical knowledge and privilege educational contexts of teaching practices. This focus of the study can also be useful for supporting the scientific and educational international community.

2. Literature Review

From this perspective, including the need to understand and appreciate interdisciplinarity in its disciplinary essence and role as an agent of change, both social and cultural, in order to transmit it to students, and to work on interdisciplinary way, amongst other actions.

In order to providing integrate preservice teachers education for knowledge and sustainable development, it is necessary to enable they learn, clarify one's own values, to contribute and envisage more inclusive positive, sustainable and resilient future for people and the planet to think systematically to respond via applied learning and to study the dialectics between tradition and innovation (Alsina & Calabuig, 2019; Tilbury, 2011). This model describes some essential strategies for promoting the transformation of the everyday knowledge of preservice teachers (knowledge, experiences and prior beliefs) into professional knowledge(Korthagen, 2001).

Later, UNESCO (2008) stated that it is necessary for education to be holistic, inclusive and transformative, and taking into account different objectives for teachers with the aim of promoting: the pedagogy and learning contents and results of learning the integration of sustainability issues into study plans contexts to student-centered teaching and learning oriented towards action based on interaction and exploratory learning, and social learners of any age and educational context to transform themselves and the society in which they live.

It is suggested that generative methods which support teachers in speculating on paths to potential futures as teachers of mathematics, can provide access to how prospective teachers negotiate issues in relation to the climate crisis and ways in which they conceive of related changes in their practices (Helliwell & Ng, 2022).

In this context, the integration of interdisciplinarity is a growing field which aims to prepare future teachers educators for their role as agents of social change by developing specific sustainability competencies (Jana & Matthias Barth, 2020). As an essential part of the diverse prospective teachers training that cannot be excluded from this goal use currently to competencies which constitute the core of the curriculum, as enable the development of the ability to appropriately apply knowledge, comprehension and skills in different contexts to communicate and manage information (Council of the EU, 2020). Teacher education for sustainability is an emerging research agenda which addresses such issues as professional teacher development and the teacher's interaction, context and practice. Until recently, these interdisciplinarity issues were only exclusively addressed from the point of view of research in mathematics education. However, nowadays it is necessary to start studying them from an integrated perspective in diverse education for sustainability.

For PTs develop the necessary professional knowledge, both mathematical, didactics and curricular assessment, it is essential they must work on solving tasks in initial training to develop the necessary professional knowledge, both mathematical and didactic, to increase the recognition of the tasks characteristics of different themes of the curricular area and of the actions of teachers to support them to carry performing tasks to appropriate resolutions use in their future teaching practices (Dempsey & O'Shea, 2020; Fernandes, 2008). Technological resources are also essential as they can facilitate connections between different areas of knowledge and also because they enrich the teaching-learning process in the classroom at different levels (Amado e Carreira de 2008).

3. Methodology

3.1. Context and participants

This research was carried out in the initial training experience of future teachers, in the academic year 2023, taught by the author in the Curriculum and assessment and mathematics didactics courses, in fundamental areas of teaching specialization, in the 3rd cycle master's program of primary and secondary education at the University of Lisbon. The participants in this study were 20 and 12 future Portuguese teachers, male and female, enrolled in these courses, with no previous interdisciplinary experience in classes.

The face-to-face work in these initial training courses for future teachers included several sessions held to follow a global approach to training strategies that promote interdisciplinary knowledge and involve PTs in collaborative group work to promote analysis, reflection, discussion and argumentation eminently around the proposed fundamental themes, and also the selection of a task for the preparation of lesson plans as a common practice in this training to develop their knowledge of professional practice and teaching resources for understanding and preparing of integration of multiple dimensions of interdisciplinarity in students' future classes. The teacher and PTs meet to present the Group Work and various types of materials and resources that generate thought and discussion are exposed. The PTs who accompanying classes are responsible for organizing and executing this stage, which allows them to guide students' motivation to investigate reality. And later they share information about the content of the activities and work they develop and enjoy the analysis of the content prepared to support colleagues. The accompanying PTs execute the plan in each subject area and the reality notebooks are appreciated and given space for proposals to improve working methods.

This research study of a qualitative and interpretative nature (Bogdan & Biklen, 1994) aiming to understand they perceptions about how the positive interdisciplinarity adopted work used by PTS in training program contribute to their recognized necessary development of pedagogical knowledge effect when elaborate detailed lesson plans integrating technology to

possible necessary use in their future professional teaching practices. In view of this objective, were tried to answer the following questions:

- (i) What perceptions did the PTs revealed about the potentialities of interdisciplinarity learning developed in their adopted work and the received support to develop knowledge to promote students learning in future practices?
- (ii) What PTs recognized this contribution to carry out their necessary using this resource in teaching practices to promote students' knowledge?

3.2. Data collection and analysis

The data collected and analyzed in the training classes were based on the cognitive components of interdisciplinarity of the PTS and justifications presented for the lesson plans prepared in groups that they considered as the potential of their promoted knowledge, and including the main options taken to choose the associated materials and tasks. And guidelines designed to use this essential skill for students in future classes, and a reflection on the potential of integrating interdisciplinarity in the activity for both them and the students.

In the following chapter is presented some results of the data analysis, focus on the dissemination of the study through the mentioned established comments and exemplifying perceptions of the interdisciplinarity work developed by the PTs, as they gave and express consent to participate voluntarily in this study research. But the used names of PTs are fictitious, in order to to guarantee the total anonymity and respect the participants confidentiality, guarantee ethical issues based on what is necessary for an assured investigation (Instituto de Educação, 2017; Comissão Europeia, 2016).

4. Results

This study was carried out in the context of the initial training program, to identify their recognition obtained in responses of elements prepared by all participants PTs relating to they recognized interdisciplinarity work carried out in these sessions, sought to know how allowed the promotion of their learning and understanding of curricular materials, mathematics integration of technologies and instructional strategies and representations developed for their teaching work. This work provided the opportunity for PTs recognize the potential of reading texts and using technological mathematical tasks to plan classes in their positive interdisciplinarity learning in training, and the satisfaction of the benefits of these resources for possible use in teaching students.

The interdisciplinarity projects included in this publication are suggestions for activities that teachers in schools can adopt and develop with their students in the 8th year of the 3rd cycle of Basic Education and higher education. The definition of projects took into account the interdisciplinarity articulation that takes place in the existence of strong links between disciplines that will work directly or simultaneously and in references to other disciplines, when there is precedence of knowledge and procedures (CD, CN, EF, EV, FQ, Geo, Hist, Ing, LE II, Mat, Port, TIC). And the citizenship values recognized in the curricular guidelines for the design of activities give a special meaning to learning.

It is possible for interdisciplinarity projects to be carried out with a good partnership between teachers or even with the entire school, depending on the amount of commitment that school management and teaching staff are willing to employ, which would be interesting to develop in a digital environment suitable for the digital version of the Notebook and disseminate it to the school community. The results of the study show that the PTs noted that allowed the highlighted positive evaluation of didactic and technological knowledge based on aspects of a cognitive nature and curriculum management prepared to appropriate teaching in their experience of training.

For example, the PTs highlighted: their revealed perceptions about what is and what it means an interdisciplinary developed knowledge as potential to support the relevant promotion of students learning; And also the recognized contribution of this developed learning interdisciplinary in their adopted work in training class to carry out their necessary using this resource in their students teaching practices.

J, A, I: Interdisciplinarity in education is the treatment of a topic with students, through activities that motivate them to develop personal thoughts, improving topics under analysis and progressing in their learning in a more sustained way to knowledge from various disciplines. In this approach, the focus is on skills and contexts in methods common to related disciplines, which contribute to the understanding of shared themes and concepts. Therefore, the work must be planned in a cooperative manner between the intervening teachers from different disciplines who develop the same project, listening to the students' research interests. And it is also the great richness of this form of work that enhances learning that characterizes curricular guidelines in the real world. As mathematics is the language of many sciences, this discipline is particularly suitable for developing interdisciplinary projects in other disciplines. The knowledge acquired becomes more adaptable to different realities.

EC, M: Interdisciplinarity is a process of connecting disciplines with the aim of giving meaning to the concepts and knowledge obtained in each one. Interdisciplinary work is important to prepare students to deal with the complexity of today's world and to become active and informed citizens. Skills for solving problems of analyzing and questioning reality, articulating knowledge and knowledge are then developed. This work not only involves students but has the advantages of greater dialogue and planning between different teachers from different areas in a more integrated formation of the student as a citizen in school coordination to exchange ideas, information and methodologies to lead to greater motivation to get closer to reality and improve learning. But interdisciplinary work is important for all areas, but particularly for mathematics because it allows the importance of its study by relating it to current and real themes.

MC, T, MA: Interdisciplinarity is what happens when knowledge from various disciplinary areas is integrated so that new, more meaningful and deeper learning emerges, as students establish connections between the various areas and with reality. The current curricular guidelines emphasize that students are expected to work on interdisciplinarity because the establishment of external connections in relation to mathematics is encouraged. Furthermore, the mathematical skills that students are intended to acquire can also be acquired through interdisciplinary tasks, such as communication favored by collaborative work and the ability to solve problems and mathematical connections. The main people involved in interdisciplinary work should be the students choosing which questions they want to work on. Teachers from various disciplines get involved in facilitating the integration of knowledge and proposing active methodologies and gamification that favor interdisciplinarity with visits to museums and the use of digital tools.

MB, B, JD, MI: Interdisciplinarity was a methodology involved in our individual and collaborative work as teachers, in explaining a topic that covers both disciplines, transgressing the rigid lines that conventional schools establish between the various curricular units or disciplines Natural Sciences, Citizenship, History and Geography. The project in which we were involved in the work of this practice helped me to develop the task that I propose to result in interdisciplinary work designed for students to practice and develop their meaning and research independently on the topic.

MJ, LF: In interdisciplinary education, all collaborative work carried out between fellow teachers is significant, as it was important for collaboration between various disciplinary areas that complement and help the success of the work carried out in their knowledge. In my opinion, it is also important to take this approach in teaching so that students develop their knowledge

in certain subjects of the curriculum worked on in interdisciplinary projects in continuous subjects. And I had the opportunity to develop an interdisciplinary activity in work carried out in the mathematics discipline, which was very important for the students because it allowed them to understand the proportionality of interdisciplinary promotion through technological resources and acquired different knowledge about the content covered in their learning.

S, BI: The construction of interdisciplinary didactic actions supports a teaching alternative that highlights the interaction and communication that exists between the different disciplines and builds the integration of coherent and meaningful knowledge. In my opinion, to carry out interdisciplinary work we must start from a topic of general interest and use tools to understand the details, and this adoption leads to deep reflections on the role of teachers, in particular, the way of teaching, which requires a constant search training. After this time I carried out interdisciplinary work studying geography and mathematics concepts and worked on them in the classroom. This experience greatly strengthened the bonds between the students in the class.

AA: The interdisciplinary approach is not based on a theme, but rather on connections and common parts between the various disciplines. Therefore, in this approach the teacher designs a learning experience, where students are invited to relate the common parts or connections between the various disciplines, to solve a specific problem. Technological resources that have collaborative characteristics can be of great help in promoting interdisciplinarity.

CA, CG: After the work we carried out in this training we are already at a good and ideal level, I experienced the experience of interdisciplinarity in graphic applicability in collaboration and I thought it supported us in the perception and integration of common contents and organizing them to be worked on between more disciplines. Interdisciplinarity will allow the cooperation of the various curricular areas to be worked on and coordinated according to the specificities of the teachers who establish the strategies and methodologies to adopt to provide a rewarding and diverse learning experience. From my perspective, interdisciplinary work in the classroom will allow students to learn across more than one area of knowledge, allowing for a greater understanding of the real value of the learning content. The possibility of using technological resources to promote interdisciplinary work is effective in fostering and cementing learning.

AL: The interdisciplinary task that I selected in my role of guiding and motivating students to work collaboratively has as its main objective that they deepen their knowledge about the disciplines of Science, Engineering and Mathematics.

AT, C, ID, F: This way of working in master's training involves everyone in our involvement and cooperation in the interdisciplinarity framed in the curriculum, which enriches the teaching and learning process by having the ability to establish bridges between various disciplines. And given my short teaching experience, I had the opportunity to recognize how to propose an interdisciplinary project, which also involved students from various educational levels who combined efforts to develop various activities and content. There were proposals for articulation addressed in various disciplines including mathematics, geometry and statistical methods applied to the analysis of patterns. I consider that interdisciplinarity is the path to this connection, which depends on what each teacher develops and how they can contribute to common action.

RC, A, R, IM: After reading and researching the documents provided in this training, identified in them, I selected a project described in a chosen video, which is based on the curricular reality of a technical school in the USA, to comment and demonstrate how using it to illustrate interdisciplinarity in learning can be achieved. an enormous level of involvement and motivation on the part of students who benefit from this teaching and learning method and reach very high levels of performance. In addition to taking advantage of a diversity of disciplinary viewpoints in collaborative teaching, they have the opportunity to receive feedback on their work from more than one teacher and create their own specific domains. These skills

acquired in the project were the result of a strong curricular articulation in the areas of Biology, Mathematics and Computational Sciences.

VD, MF, AC: In the video I saw on Teaching, about the construction, I was able to vividly witness the articulation of concepts and operations not only in Physics, but also in design (through initial projection drawings, based on each person's ideas), language (with the correct and unequivocal identification of elements and processes), presentation and public discussion of ideas, virtual simulation, algebra, accounting, inventory and purchasing, etc. It was also very curious to note that the teacher's work often involved motivation to independently adjust what they had already done. For the students, it was interesting to see the very functional division of tasks, which made many teams work in real companies. There is an opportunity here to expand students' knowledge, skills and motivations, within a normality that so often seems to stagnate and close them down. A more interdisciplinary approach involves using what is common to the various disciplines.

AT: I believe that This task work in my training intended to support us in the work to be carried out in approaching the theme of interdisciplinarity, which contributed significantly to the ease in perceiving it and recognizing various certain themes from the point of view of the various disciplinary areas to create the various disciplines in order to better address different realities, in which an articulated vision is implied and where the various knowledge complements each other based on their differences. Each future teacher can play a very relevant role, based on their own interests and needs for relevant knowledge about the classes and we transfer the subjects to other colleagues to cooperate in what we propose. There were proposals for articulation with various disciplines, including mathematics, which is present in everything and can be approached in different ways, geometry, and statistical methods being applied to the analysis of patterns. The use of technological resources has the potential to facilitate work and communication between the future teachers involved and products of joint work.

5. Discussion and Conclusion

To conclude, As these PTs did not yet have in-depth knowledge of the interdisciplinarity, was confirmed being favorable this carried study as it is important in the contexts of initial training experience focused on understanding the diversity prospective teachers evidences and confirmed perceptions that recognized the importance of that allow as positive contribution of their innovative aspects of interdisciplinarity that is therefore possible to state the use to reassure the appropriate work of they knowledge and appreciation of the adequacy articulation of the content and planning classes developed by groups. It is highlighted that they deepen the understanding of this potential of several thematics and described interessant works done to also accepting the use of specific integration of technology in teaching tool students that are relevant in recent curricular objectives in teaching classrooms for carrying out significant learning of fundamental ideas related to the topics in providing work, which reinforces the important perceptions about this positive contribution use to develop mathematical, didactic and pedagogical knowledge (Ponte & Quaresma, 2016). In particular, they explicited the intention and possibility for improving processes of teaching practices when it favors to possible use and applying them to promote students' mathematical learning,

However, as this study is mainly focusing on Pts of mathematics didactics and curriculum assessment, I argue a proposal to overcome another necessary study that will be performed focus on other PTs training experiences, based on their offer opportunities to plan teaching and learning situations with concrete experiences of interdisciplinary use with students, and also to put these situations planed into practice, reflecting on their implementation in the classroom, and also teacher training. Finally, this relevant carried out study assigns a central place to the characteristics of initial training models, which can contribute to consolidating the importance

of the better training process to enable PTs to promote competent professional learning in promoting improvement students' learning of diverse areas thematic, using interdisciplinarity, to bring them closer to the expected reality of their future practice of students at all levels of schooling. And provide new elements to guide the scientific and educational community to identify and understand the adequacy and potentialities of these principles for professional learning of future teachers involved in training.

This relevant study, it is useful to recognize the effectiveness evidence of positive and important development of this use addressed interdisciplinarity practice in the preparation of professional knowledge of PTs on the training developed, as opportunities to showed they knowledge and that it can encourage them to help progressively use of the integration of specific digital technologies contexts in the teaching students course to help the effectiveness learning. And provide elements to guide the necessary international professional scientific and educational community to identify and understand the adequacy and potentialities of these principles for professional learning of future teachers involved in training.

References

- Álsina & Calabuig, M. T. (2019). Vinculando Education matemáticas y sostenibilidad: Implicaciones para la formación inicial de maestros como herramienta de transformación social. *Revista de Educación Ambiental y Sostenibilidad*, 1(1), 1203. https://doi.org/10.25267/Rev_educ_ambient_sostenibilidad.2019.v1.i1.1203
- Amado, N., & Carreira, S. (2008). Utilização pedagógica do computador por professores estagiários de Matemática—diferenças na prática da sala de aula. *Tecnologias e educação matemática*, 286–299.
- Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.
- Comissão Europeia (2016). *Regulamento relativo à proteção das pessoas singulares no que diz respeito ao tratamento de dados pessoais (UE) 2016/679 DO PARLAMENTO EUROPEU E DO CONSELHO de 27 de abril de 2016*. <https://eur-lex.europa.EU/legal-content/PT/TXT/HTML/?uri=CELEX:32016R0679&from=PT>.
- Council of the EU (2022). *Council Recommendation on learning for the green transition and sustainable development*. [https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/HTML/?uri=CELEX:32022H0627\(01\)](https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/HTML/?uri=CELEX:32022H0627(01))
- Dempsey, M., & O'Shea, A. (2020). The role of task classification and design in curriculum making for preservice teachers of mathematics. *The Curriculum Journal*, 31(3), 436–453. <https://doi.org/10.1002/curj.18>
- Fernandes, D. (2008). *Avaliação das aprendizagens: desafios às teorias, práticas e políticas*. Lisboa, Portugal: Texto Editores.
- Helliwell, T., & Ng, O. (2022). Imagining possibilities: Innovating mathematics (teacher) education for sustainable futures. *Research in Mathematics Education* 24(2), 117–127. <https://doi.org/10.1080/14794802.2022.2090422>
- Instituto de Educação (2017). *Carta ética para a investigação em educação e formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa*. Lisboa: <http://www.ie.ulisboa.pt/download/carta-etica-e-regulamento-da-comissao-de-etica>

- Jana-Michaela Timm & Matthias Barth (2020): Making education for sustainable development happen in elementary schools: the role of teachers. *Environmental Education Research*, 27(1), 50–66. <https://doi.org/10.1080/13504622.2020.1813256>
- Korthagen, F. A. J. (2001). *Linking practice and theory: The pedagogy of realistic teacher education*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Lygianne Batista Vieira & Geraldo Eustáquio Moreira (2020). Contribuições da Educação Matemática para a cultura de respeito à dignidade humana. *Bauru*, 8(2), 173–188.
- Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais Matemática*. Lisboa: DGE.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA.
- Niess, M. L. (2012). Teacher Knowledge for Teaching with Technology: A TPACK lens. In R. Ronau, C. Rakes e M. Niess (Eds.), *Educational technology, teacher knowledge, and classroom impact: A research handbook on frameworks and approaches* (pp. 1–15). Hershey, PA: IGI Global. ISBN 978-1-60960-751-7.
- Ponte, J. P. & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics*, 93(1), 51–66.
- Tilbury, D. (2011). *Education for sustainable development: An expert review of processes and learning*. UNESCO. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000191442>
- Timm, J., Barth, M., (in press). Making ESD happen in school - teachers perspectives on ESD competencies. *Environ. Educ. Res.*
- UNESCO (2008). ICT competency standards for teachers. Paris: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization. <http://unesdoc.unesco.org/images/0015/001562/156209E.pdf>

STATICKÝ A DYNAMICKÝ PRÍSTUP K ZÁPISU ČÍSLA A JEHO PREVODOM MEDZI ČÍSELNÝMI POZIČNÝMI SÚSTAVAMI

Jana HNATOVÁ

Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (Slovenská republika)

jana.hnatova@unipo.sk

Abstrakt

Zápis čísla v danej pozičnej sústave a jeho prevod medzi rôznymi pozičnými sústavami je v matematike možné realizovať viacerými metódami, podrobnejšie sú rozpracované tri základné metódy prevodu – substitučná metóda, metóda delenia základom a metóda násobenia základom. Podobne, aj k výučbe uvedenej problematiky je možné, a to už na propedeutickej úrovni, pristupovať rôznymi spôsobmi. Za jeden z podmieňujúcich faktorov možno považovať uchopenie obsahu matematického vzdelávania samotným učiteľom. Pri statickom vnímaní je tento obsah možné prezentovať v podobe súboru faktov a vzorcov. Pri dynamickom vnímaní obsahu, je jeho sprístupňovanie založené na učení prostredníctvom skúmania procesov a súvislostí. Tu je žiadúce, aby učiteľ dokázal identifikovať nielen dynamické prepojenia vo vnútri vzdelávacej oblasti Matematika a informatika, ale aj jej prepojenia s ďalšími vzdelávacími oblasťami školskej edukácie. V článku sú prepojenia s oblasťami Človek a spoločnosť a Umenie a kultúra verifikované ukážkami izomorfných úloh, ktoré možno zaradiť do rôznych školských i voľnočasových aktivít. Dynamické sprístupnenie uvedeného obsahu je podporené autorsky spracovanými appletmi pracujúcimi na báze technológie rozšírenej reality, ktorú využíva aj voľne dostupný matematický softvér GeoGebra. Článok taktiež prináša parciálne výskumné zistenia z pilotného testovania učebnej podpory pracujúcej s technológiou rozšírenej reality. Výsledky poukazujú na záujem študentov o prácu s touto technológiou a podporu jej aktívneho začleňovania do pregraduálnej matematickej prípravy.

Kľúčové slová: interdisciplinárne vyučovanie, izomorfné slovné úlohy, rozšírená realita

A STATIC AND DYNAMIC VIEW ON NUMBER REPRESENTATION AND ITS CONVERSION BETWEEN POSITIONAL NUMERAL SYSTEMS

Abstract

The representation of a number in a given positional numeral system and its conversion between different positional systems can be performed using several methods in mathematics. This article elaborates on three fundamental conversion methods: the substitution method, the base division method, and the base multiplication method. Similarly, the teaching of this topic—even at the propedeutic level—can be approached in various ways. One of the key determining factors is how the mathematics education content is conceptualized by the teacher. From a static perspective, the content may be presented as a set of facts and formulas. In contrast, a dynamic perspective is based on learning through the exploration of processes and interrelations. In this context, it is essential for the teacher to identify not only the internal dynamic connections within the subject area of Mathematics and Informatics, but also its interdisciplinary links with other educational domains. The article verifies interdisciplinary connections with the domains of Human and Society and Art and Culture through examples of

isomorphic tasks suitable for inclusion in both classroom and extracurricular activities. The dynamic approach to the topic is supported by original applets utilizing augmented reality technology, as employed by the freely available mathematics software GeoGebra. The article also presents partial research findings from pilot testing of educational support materials using augmented reality. The results indicate students' interest in working with this technology and support its active integration into undergraduate mathematics education.

Keywords: augmented reality, interdisciplinary teaching, isomorphic word problems

1. Úvod

Kompetentný učiteľ matematiky je podľa viacerých štúdií chápaný ako učiteľ so širokou škálou všeobecných, odborných a pedagogicky orientovaných vedomostí a zručností ako aj s rozvinutými afektívno-motivačnými charakteristikami. (Blömeke et al., 2020; Nováková, 2020). Vedomosti a zručnosti učiteľa sa dokázateľne prejavujú v jeho výkone, v zmysle kvality výučby. Podobne učiteľovo chápanie sprístupňovaného obsahu matematického vzdelávania ovplyvňuje výber ním použitých metód a prostriedkov. V statickom pohľade učiteľ zobrazuje matematický obsah ako algoritmizovaný súbor faktov a vzťahov vyjadrených vzorcami, ktoré sú zvládnuteľné memorovaním. V dynamickom chápaní obsahu, je jeho sprístupňovanie založené na učení prostredníctvom skúmania procesov (Hannula et al., 2016).

Statický i dynamický pohľad na sprístupnenie vzdelávacieho obsahu v rámci školskej aj voľnočasovej matematiky dovoľuje množstvo tém. Z nich bude v ďalšom texte konkretizované prepojenie zápisu čísla v danej číselnej pozičnej sústave a prevodu čísla medzi číselnými pozičnými sústavami s nerovnakým základom, a to naprieč viacerými školskými vzdelávacími oblasťami. Existenciu prepojení medzi matematickým obsahom a obsahom ďalších vzdelávacích oblastí možno identifikovať pomocou izomorfných úloh, ktoré sú v týchto oblastiach kontextovo ukotvené. Podľa Petráčovej a Krausa (2005) vyjadruje izomorfizmus vo všeobecnosti vzťah medzi dvoma objektmi, resp. systémami, ktorý poukazuje na úplnú zhodu alebo podobnosť ich štruktúr, resp. úplnú funkčnú zhodu. Reed (1987), Amti a Retnowati (2024) zhodne charakterizujú izomorfné slovné úlohy ako úlohy, ktoré napriek nerovnakému konceptu slovne formulovaného problému, teda napriek rozdielnemu príbehu, spejú k rovnakej stratégii riešenia. Podľa Tomovej (2015) izomorfizmus pomáha študentom v ich učiteľskej príprave. Rizikom je však jednoduché napodobňovanie postupov bez dostatočného porozumenia. Naším zámerom je preto vychádzať zo znalostí matematického obsahu a identifikovať možnosti podpory jeho dynamického zobrazenia, ktoré by umožnili skúmanie procesov sprevádzajúcich zápis čísla a jeho prevod medzi číselnými sústavami s využitím technológie rozšírenej reality (ang. *augmented reality*, skr. AR).

2. Metódy zápisu čísla v danej pozičnej sústave a prevodu čísla medzi číselnými pozičnými sústavami

Nech je v danej číselnej pozičnej sústave so základom $z \in \mathbb{N}$, kde $z > 1$, dané nenulové prirodzené číslo N rádu k , t. j. jeho zápis pozostáva z $k + 1$ číslic označených n_k až n_0 , pre ktoré platí $0 \leq n_i < z$. Podľa vety o rozvoji prirodzeného čísla možno takéto číslo jednoznačne zapísať v tvare:

$$N \stackrel{(1)}{=} (n_k n_{k-1} n_{k-2} \dots n_1 n_0)_z \stackrel{(2)}{=} \sum_{i=0}^k n_{k-i} \cdot z^{k-i}$$

Rovnosť (1) zavádza skrátenejší zápis čísla N a rovnosť (2) rozšírený, resp. rozvinutý zápis čísla N v danej číselnej pozičnej sústave so základom z alebo tiež v z -adickej sústave.

Podobne na prevod čísla medzi dvoma adickými sústavami možno využiť viaceré metódy, ku ktorým patria substitučná metóda, metóda delenia základom a metóda násobenia základom. Ďalšie konkretizácie budú zacielené na ukážky práce s dvojkovou pozičnou sústavou, ktorej propedeutické využitie, ako bude v nasledujúcich prepojeniach demonštrované, možno nájsť už v rámci primárneho matematického vzdelávania.

Substitučná metóda dovoľuje nahradiť zápis binárneho čísla N polynómom (3),

$$N = \sum_{i=0}^k n_{k-i} \cdot 2^{k-i} = n_k \cdot 2^k + n_{k-1} \cdot 2^{k-1} \dots + n_3 \cdot 2^3 + n_2 \cdot 2^2 + n_1 \cdot 2^1 + n_0 \cdot 2^0 \quad (3)$$

pričom číslice n_k až n_0 nadobúdajú pre dvojkovú pozičnú sústavu len hodnoty z číselnej množiny $\{0, 1\}$. Vyjadrením súčtu členov polynómu v dekadickom zápise získavame prevod binárneho čísla do desiatkovej pozičnej sústavy. Konkrétnou statickou ukážkou použitia tejto metódy je algoritmický prevod binárneho zápisu čísla 10010 do dekadického postupom (4).

$$(10010)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 16 + 2 = 18_{10} \quad (4)$$

Ďalšou používanou metódou prevodu je metóda delenia základom. Tá spočíva v delení daného prirodzeného čísla a jeho vznikajúcich podielov základom číselnej sústavy, do ktorej sa zápis čísla prevádza. Teda prirodzené číslo N , ktoré má byť zapísané v dvojkovej sústave, možno deliť celočíselne číslom 2 a zapísať v podobe podielu P_1 so zvyškom $n_0 \in \{0, 1\}$ (5).

$$N = \sum_{i=0}^k n_{k-i} \cdot 2^{k-i} = \underbrace{(n_k \cdot 2^{k-1} + n_{k-1} \cdot 2^{k-2} \dots + n_3 \cdot 2^2 + n_2 \cdot 2^1 + n_1 \cdot 2^0)}_{P_1} \cdot 2 + n_0 \quad (5)$$

Analogicky možno pokračovať delením podielov P_1 až P_k , končiac nulovým podielom. Výstupom prevodu do dvojkovej sústavy je číslo N s pozičným zápisom číslic $n_k n_{k-1} \dots n_2 n_1 n_0$ (6).

$$\begin{aligned} P_1 &= \underbrace{(n_k \cdot 2^{k-2} + \dots + n_3 \cdot 2^1 + n_2 \cdot 2^0)}_{P_2} \cdot 2 + n_1 \\ P_2 &= \underbrace{(n_k \cdot 2^{k-3} + \dots + n_3 \cdot 2^0)}_{P_3} \cdot 2 + n_2 \\ &\vdots \\ P_{k-1} &= \underbrace{(n_k \cdot 2^0)}_{P_k} \cdot 2 + n_{k-1} \\ P_k &= 0 \cdot 2 + n_k \end{aligned} \quad (6)$$

Konkrétnou ukážkou použitia tejto metódy, napr. pri prevode čísla 18 do binárneho zápisu je postup (7), ktorý je aj v školskej matematike bežne zaužívaný. V ňom sa realizuje opakujúce sa delenie čísla 18 a jeho podielov základom 2, pri ktorom vznikajúce zvyšky $n_0 = 0$, $n_1 = 1$, $n_2 = 0$, $n_3 = 0$ a $n_4 = 1$ umožňujú zapísať číslo 18 v dvojkovej pozičnej sústave zápisom: $18_{10} = (10010)_2$.

$$\begin{array}{ccccc} 18 : 2 = 9 \text{ zv. } 0; & 9 : 2 = 4 \text{ zv. } 1; & 4 : 2 = 2 \text{ zv. } 0; & 2 : 2 = 1 \text{ zv. } 0; & 1 : 2 = 0 \text{ zv. } 1 \\ 0 = n_0 & 1 = n_1 & 0 = n_2 & 0 = n_3 & 1 = n_4 \end{array} \quad (7)$$

Metóda násobenia základom dopĺňa predchádzajúce postupy. Je určená na prevod desatinnej časti racionálneho čísla medzi dvoma číselnými pozičnými sústavami. Majme číslo M , pre ktoré platí $0 < M < 1$, vyjadrené polynómom (7) na k platných číslic.

$$M = \sum_{i=-1}^{-k} n_i \cdot 2^i \quad (7)$$

kde n_{-1} až n_{-k} sú čísla z množiny $\{0, 1\}$ pričom $n_{-k} \neq 0$. Po úprave opakovaným násobením číselným základom cieľovej sústavy a následnom spisovaní číslice na pozícii jednotiek dostávame zápis desatinnej časti čísla v dvojkovej pozičnej sústave (8).

$$\begin{aligned} M &= n_{-1} \cdot 2^{-1} + n_{-2} \cdot 2^{-2} + \dots + n_{-k} \cdot 2^{-k} \\ M &= 2^{-1}(n_{-1} + n_{-2} \cdot 2^{-1} + n_{-3} \cdot 2^{-2} + \dots + n_{-k} \cdot 2^{-k+1}) \quad / \cdot 2 \\ M \cdot 2 &= n_{-1} + \underbrace{n_{-2} \cdot 2^{-1} + n_{-3} \cdot 2^{-2} + \dots + n_{-k} \cdot 2^{-k+1}}_{Q_1} \\ Q_1 &= 2^{-1}(n_{-2} + n_{-3} \cdot 2^{-1} + \dots + n_{-k} \cdot 2^{-k+2}) \quad / \cdot 2 \\ Q_1 \cdot 2 &= n_{-2} + \underbrace{n_{-3} \cdot 2^{-1} + \dots + n_{-k} \cdot 2^{-k+2}}_{Q_2} \\ &\vdots \\ Q_{k-1} &= 2^{-1} \cdot n_{-k} + 0 \quad / \cdot 2 \\ Q_{k-1} \cdot 2 &= n_{-k} \end{aligned} \quad (8)$$

Použitie tejto metódy pre prevod čísla 0,375 do binárneho zápisu je uvedené v nasledujúcej schéme (schéma 1).

Schéma 1. Prevod čísla 0,375 do dvojkovej sústavy metódou násobenia

$(0,375)_{10}$	$(0,011)_2$
$0,375 \cdot 2 = 0,75$	$= 0 + 0,75$
$0,75 \cdot 2 = 1,5$	$= 1 + 0,5$
$0,5 \cdot 2 = 1$	$= 1 + 0$

3. Prepojenie s dejepisným komponentom oblasti Človek a spoločnosť

V historickom kontexte možno identifikovať prepojenia na uvedené metódy zápisu a prevodu čísla medzi dvoma adickými sústavami v rôznych historických obdobiach.

Použitie polynomického rozkladu čísla možno nájsť už v egyptskom spôsobe násobenia zaznamenanom na Rhindovom papyruse (Čižmár, 2017). Tento je založený na binárnom zápise jedného z činiteľov, kde sa v jednom stĺpci realizuje postupné zdvojnásobovanie hodnôt počínajúc číslom 1 a končiac najbližším číslom, ktoré je menšie nanajvýš rovné danému činiteľu. Postupne sa tak vytvára zápis prvých k členov postupnosti $\{2^n\}_{n=0}^{\infty}$. Ten dovoľuje nájsť jednotlivé členy polynomického rozkladu daného činiteľa postupným odčítaním najbližších menších mocnín čísla 2 od vznikajúcich rozdielov (schéma 2).

Schéma 2: Zdvojnásobovanie dosiahnutého čísla podľa egyptské spôsobu násobenia

	18_{10}	10010_2
	$1 = 2^0$	0
✓	$2 = 2^1$	1
	$4 = 2^2$	0
	$8 = 2^3$	0
✓	$16 = 2^4$	1

V uvedenej schéme je 2^4 najvyššou mocninou základu 2, ktorá je menšia nanajvýš rovná danému číslu 18. Túto mocninu teda možno využiť v polynomicom rozklade čísla v podobe jej jedennásobku. Preto riadok v schéme označíme, resp. priradíme mu hodnotu 1. Po odčítaní ($18 - 16 = 2$) opätovne odhadujeme vzniknutý rozdiel najbližšou menšou mocninou, tomto prípade rovnou mocninou 2^1 . Riadok obsahujúci uvedenú mocninu opäť označíme, hodnoty odčítame ($2 - 2 = 0$) a v prípade, ak by bol novovzniknutý rozdiel nenulový, postup znova zopakujeme. Po ukončení odčítania priradíme zvyšným mocninám hodnotu 0 chápanú ako nulový násobok mocniny v polynomicom rozklade hľadaného čísla. Číslo 18 je teda možné zapísať ako súčet čísel 16 a 2, tiež ako súčet mocnín 2^4 a 2^1 . Podľa vzťahu (3) má skrátenejší zápis čísla 18 v dvojkovej sústave číslicu 1 na pozícii 4. a 1. rádu, pričom ostatné pozície obsahujú číslicu 0.

Izomorfnú úlohu prepájajúcu tento, v histórii známy, postup prevodu čísla so školským matematickým obsahom možno nájsť v učebnici matematiky pre 3. ročník ZŠ (Hejný et al., 2009, s. 81): *Bilandskú sumu meníme na A-groše pomocou prevodů: Bg = 2 Ag; Cg = 4 Ag; Dg = 8 Ag; Eg = 16 Ag; Fg = 32 Ag. Vyjádři jako bilandskou sumu 18 Ag.* Tu je potrebné doplniť, že jednou zo základných požiadaviek platby v bilandskej mene je výber najviac jednej mince danej hodnoty, ktorá bude v platbe výslednej sumy použitá. Algoritmické riešenie úlohy (schéma 2) možno v dynamickom pohľade na sledované procesy v úlohách tohto typu skúmať s prepojením na informatiku a s využitím AR. V snahe vyhnúť sa duplicitě je uvedený pohľad konkretizovaný v časti 5.

Z historického pohľadu ponúka pragmatické využitie ďalšej, nami popisovanej metódy delenia základom, ruské, niekedy označované ako „sedliacke“ alebo „rolnícke“ násobenie (Porubský, 2009). Ruské násobenie je jedným z možných spôsobov násobenia dvoch prirodzených čísel, ktoré vyžaduje schopnosť aplikovať metódu delenia základom 2 na jednom z činiteľov. Pomocou nej sa opakovaným delením dvomi rozkladá jeden z činiteľov, pričom sú sledované zvyšky po delení, resp. sleduje sa ich parita. Výsledný binárny zápis čísla možno tvoriť spísaním zvyškov po delení v poradí odzadu dopredu, resp. zdola nahor (schéma. 3).

Schéma 3: Opakované delenie čísla 18 na polovice v ruskom spôsobe násobenia

	$18_{10} = 10010_2$	
	$18 : 2 = 9$	zv. 0
✓	$9 : 2 = 4$	zv. 1
	$4 : 2 = 2$	zv. 0
	$2 : 2 = 1$	zv. 0
✓	$1 : 2 = 0$	zv. 1

Aj v tomto prípade je jeden z možných dynamických pohľadov na uvedený algoritmus popísaný s prepojením na informatikou a prácu s AR v časti 5.

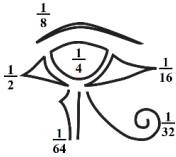
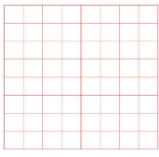
Pri ostatne zmieňovanej metóde násobenia základom je možné nájsť styčné elementy binárneho zápisu desatinnej časti racionálneho čísla s egyptským spôsobom zápisu zlomkov. Podľa Vymazalovej (2004) boli u Egyptanov v tomto ohľade svojim zápisom špecifické zlomky $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ a $\frac{1}{64}$, nazývané tiež zlomky Hórovho oka. Každý zlomok mal vlastný znak, odlišný od bežne používaných egyptských zlomkov a popisoval jeho jednu konkrétnu časť (obr. 1). Predpokladá sa, že tieto zlomky vznikli v procese poltenia celku a v starovekom Egypte sa využívali výhradne pri meraní objemu a s ním súvisiacimi prepočtami objemových jednotiek. Podľa dochovaných záznamov bolo pre Egyptanov zdvojnásobovanie zlomkov Hórovho oka jednoduché a vysoko praktické (Bečvář et al., 2003; Vymazalová, 2004).

Izomorfne úlohy využívajúce takéto prepojenie histórie a matematiky možno propedeuticky zaradiť do výučby matematiky v 2. cykle ZŠ, kde je v rámci matematických vzťahov požadované pochopenie ekvivalentnosti zlomkov na rôznych modeloch a ich využívanie pri sčítaní a odčítaní v obore kladných čísel (obr. 1).

Znak Horovho oka sa používal už v starovekom Egypte na vyjadrenie častí celku. Skús to aj ty.

Úloha:

Vyfarbi časť, ktorá zodpovedá $\frac{3}{4}$.


Obrázok 1. Prepojenie vzdelávacích oblastí Matematika a informatika s oblasťou Človek a spoločnosť izomorfnými úlohami.

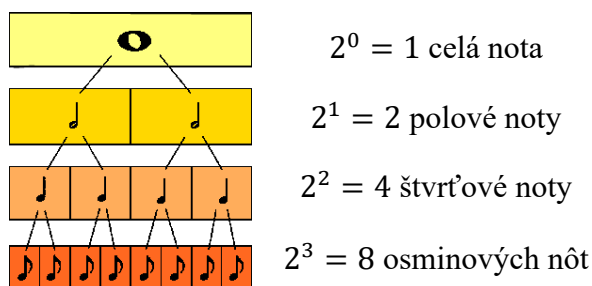
V sumarizácii dejepisného komponentu vzdelávacej oblasti Človek a spoločnosť pre 2. cyklus ZŠ možno konštatovať, že v súčasnosti overovanom Štátnom vzdelávacom programe pre základné vzdelanie (ďalej len ŠVP) sa nachádza požiadavka charakterizovať vybranú starovekú civilizáciu aj s ohľadom na dosahovanú úroveň starovekého poznania vied, napr. matematiky (NIVAM, 2023). Je na škodu veci, že v nadväzujúcom cykle, ustupuje poznanie historického vývoja vied do pozadia pred geopolitickými, hospodárskymi a kultúro-spoločenskými charakteristikami jednotlivých období a to na úrovni poznania jak svetových, tak aj národných dejín.

4. Prepojenie s hudobnou výchovou v oblasti Umenie a kultúra

Druhou oblasťou, na ktorú sme v rámci hľadania prepojení s riešenou problematikou zamerali bola hudobná výchova začlenená do oblasti Umenie a kultúra.

Elementy používania dvojkovej sústavy možno identifikovať aj v jej obsahu, kde podľa ŠVP je pri určovaní hodnôt hudobných nôt súčasne rozvíjaná matematická, čitateľská i vizuálna gramotnosť (NIVAM, 2023). V 1. cykle ZŠ sa od žiaka očakáva hra podľa grafickej partitúry či z notového zápisu v štvrtových a osminových hodnotách. To zo sebou prináša základné poznanie o dĺžke trvania tónov, pre ktoré platí, že jedna nota väčšej hodnoty (čo do trvania) zodpovedá dvom notám najbližšej menšej hodnoty. V 2. cykle pribúda požiadavka hry z notového zápisu v polových hodnotách a v 3. cykle je už pri hre na hudobnom nástroji požadované aktívne a vedomé používanie hudobného písma v podobe klasickej notácie a akordických značiek (NIVAM, 2023).

Pri určovaní hodnôt hudobných nôt je na hodinách hudobnej výchovy často využívaná tzv. rytmická pyramída, v ktorej má podľa zavedeného pravidla celá nota hodnotu dvoch polových nôt, polová nota dvoch štvrtových nôt, štvrtová nota dvoch osminových nôt atď. (obr. 2).



Obrázok 2. Rytmická pyramída

Prepojenosť oblastí možno deklarovať izomorfizmom úlohy kontextovo súvisiacou s oblasťou Umenie a kultúra: „Zistiť, koľko šesnásťtinových, resp. dvaatridsatínových nôt má hodnotu celej noty.“ a slovnej úlohy riešenej na hodinách matematiky: „Prelož papier A4 na polovicu. Tú polovicu prelož opäť na polovicu. Pokračuj takto ďalej. Eviduj, koľko vrstiev vzniklo každým preložením.“ (Hejný et al., 2022). V oboch úlohách totiž existuje stratégia riešenia využívajúca rovnaký matematický model.

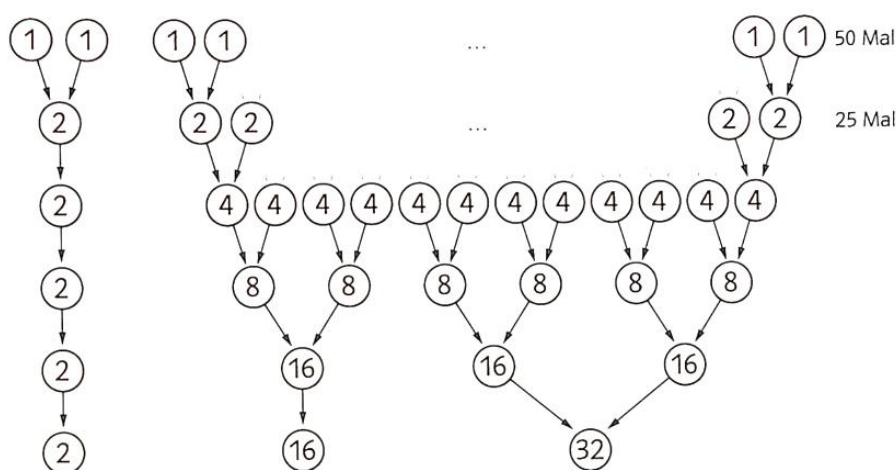
5. Prepojenie s informatikou v rámci oblasti Matematika a informatika s využitím digitálnych technológií

Tretou oblasťou, v ktorej bolo možné identifikovať prepojenia s riešenou problematikou a ktorá navyše ponúka možnosť dynamizovať uvedené postupy použitím digitálnych technológií je oblasť matematiky a informatiky. Konkrétne v informatike je binárny kód kľúčovým stavebným prvkom, ktorý dovoľuje prispôbiť vyjadrenie informácie možnostiam daného technického zariadenia. Pri práci s elektrickým signálom v počítačoch sa popisujú dva stavy „zapnuté“ (1) a „vypnuté“ (0), pričom všetky dáta a inštrukcie sú prevádzané do tejto binárnej formy využívajúcej matematické princípy dvojkovej pozičnej sústavy.

V švajčiarskych učebniciach informatiky je propedeutika zápisu čísla v dvojkovej pozičnej sústave zaradená do výučby v rámci primárneho stupňa vzdelávania (Dagiene et al., 2021; Hromkovič & Lacher, 2019). Úlohy sú situované do krajiny BIN, v ktorej prebiehajú platby len pomocou dostupných mincí v hodnote 1, 2, 4, 8, 16, 32 a 64, teda nasledujúca minca má vždy dvojnásobnú hodnotu ako predchádzajúca, pričom pri platbách platí pravidlo najmenšieho počtu mincí. Požiadavka zaplata sumy 50 v BIN je vysvetlená dvoma spôsobmi. Prvý z nich (obr. 3) korešponduje s použitím substitučnej metódy zápisu čísla v dvojkovej pozičnej sústave. Druhý spôsob platby (obr. 4) korešponduje s použitím metódy delenia základom.

$$50 = \textcircled{32} + 18 \quad 50 = \textcircled{32} + \textcircled{16} + 2 \quad 50 = \textcircled{32} + \textcircled{16} + \textcircled{2}$$

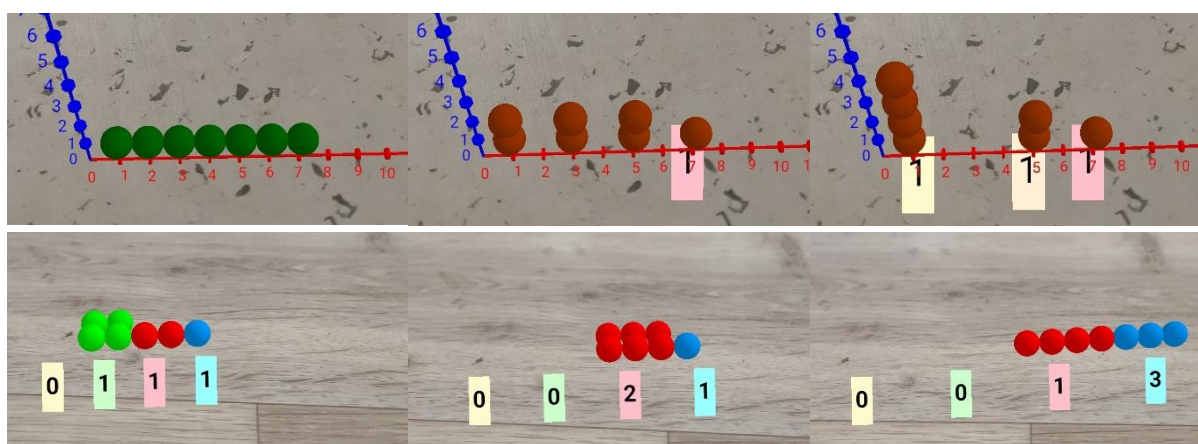
Obrázok 3. Platba v krajine BIN modelovaná substitučnou metódou
Zdroj: (Hromkovič & Lacher, 2019, s. 58)



Obrázok 4. Platba v krajine BIN modelovaná metódou delenia základom
Zdroj: (Hromkovič & Lacher, 2019, s. 59)

Uvedené postupy je možné dynamizovať viacerými spôsobmi. Jedným z nich je reálne použitie mincí, resp. ich modelov. Pomocou nich možno demonštrovať použitie metódy delenia základom postupným skladaním mincí na kôpky kopírujúc postup (obr. 4). Ďalšou možnosťou je využitie digitálnych technológií, ktoré umožňujú nielen realizovať numerické výpočty, ale aj experimentovať a objavovať nové poznatky, modelovať, prezentovať a zdieľať matematický obsah (Wossala & Seidlová, 2022). AR technológia k týmto možnostiam pridáva prepojenie skutočného a virtuálneho prostredia, v ktorom skutočné a virtuálne objekty koexistujú (Di Serio et al., 2013) a žiak s nimi môže priamo alebo nepriamo interagovať (Hnatová, 2023).

Práca s AR technológiou je podporovaná aj voľne dostupným matematickým softvérom GeoGebra (<https://www.geogebra.org>). Zámerom v tomto prostredí vytvorených AR appletov (t.j. appletov podporujúcich inkorporáciu AR do matematickej edukácie) bola dynamická vizualizácia algoritmov prevodu čísel z desiatkovej do dvojkovej sústavy a späť (obr. 5 - hore) a prevodu čísel medzi číselnými sústavami s rôznym základom (obr. 5 - dole).

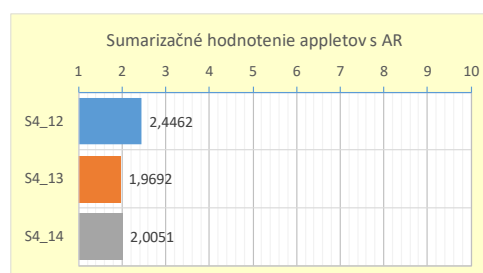


Obrázok 5. Ukážka dynamicky spracovaného prevodu čísla 7 z desiatkovej do dvojkovej číselnej sústavy a jeho zápisu v číselnej sústave so základom 2, 3 a 4 pomocou AR.

Celkovo päť appletov zameraných na zápis čísla v pozičnej sústave a na prevod čísla medzi dvoma pozičnými sústavami, vybraných z autorsky vytvorenej databázy AR appletov (Hnatová et al., 2024), bolo hodnotených v pilotnom testovaní, a to študentmi bakalárskeho študijného odboru predškolská a elementárna pedagogika ($N = 20$) a študentmi magisterského študijného odboru učiteľstvo pre primárne vzdelávanie ($N = 19$). Následne, v dotazníkovom šetrení, na desaťbodovej Likertovej škále s rozložením od 1 – úplná spokojnosť až 10 – úplná nespokojnosť, títo študenti hodnotili svoju používateľskú skúsenosť s jedným z vybraných AR appletov (tab. 1). V položkách s otvorenou odpoveďou sa taktiež vyjadrili k nim zisteným pozitívam a negatívam. Výsledky spoľahlivosti vyhodnocovaných položiek merané Cronbachovým α (Cronbach alpha = 0,8579; Standardiz. alpha = --,9237) naznačujú vysokú reliabilitu merania.

Tabuľka 1 Parciálne výsledky vybraných položiek dotazníkového šetrenia.

Kód	N	Priemer S4_12	Priemer S4_13	Priemer S4_14
djjar89s	20	2,32	2,89	2,71
qm2c4z72	5	6,20	1,60	1,40
vqwjsjdu	5	1,60	1,80	3,00
ysruhegm	2	5,00	1,00	1,00
zagnwbbd	7	4,46	3,29	4,43



V podľa zistených parciálnych výsledkov týkajúcich sa uvedených appletov možno konštatovať, že práca s appletmi v AR bola pre študentov relatívne novou skúsenosťou ($\bar{x}_{S4_12} \doteq 2,45$). Významné rozdiely boli identifikované medzi študentmi bakalárskeho študijného odboru predškolská a elementárna pedagogika, ktorí seminár povinne voliteľného predmetu Matematika a počítač absolvovali, a študentmi, ktorí tento predmet neabsolvovali.

Vysokú mieru spokojnosti s funkčnosťou vybraného appletu vyjadřilo priemerne 8 z 10 študentov. V zodpovedajúcej položke $S4_13$ bol dosiahnutý priemer $\bar{x}_{S4_13} \doteq 1,97$ s rozsahom údajov v intervale [1,5].

Porovnateľnú mieru podpory vyslovili študenti zaradeniu testovaných appletov do ďalšej výučby ($\bar{x}_{S4_14} \doteq 2,00$). Kladne hodnotená bola farebná rozlíšiteľnosť objektov, dynamika vizualizácie, možnosť zachytenia výsledkov činnosti snímkou alebo krátkym videom. Na ukážku uvádzame autentické sumárne hodnotenie študentky Anky:

„Zvolený applet považujem za veľmi dobrú a efektívnu didaktickú pomôcku pri prvom kontakte s inou pozičnou sústavou, pri zapisovaní čísel, pri ich rozklade a skladaní. V 3. ročníku je už podľa môjho názoru pre žiakov vhodné prejsť od "klasickej" manipulácie s predmetmi k tomuto digitálnemu spôsobu. Pre žiakov by bola práca s týmto appletom, obzvlášť pri hre, pútavá a zaujímavá.“

Pripomienkované boli technické problémy s načítaním vodorovnej plochy pre zobrazenie objektov v rozšírenej realite, keďže applety pracujú s *Anchor-based AR*, ktorá vyžaduje ukotvenie virtuálnych objektov v reálnom prostredí pomocou povrchovej referenčnej kotvy. Pripomienkovaná bola tiež dlhšia časová odozva pri práci s konkrétnym mobilným zariadením a appletom, ako aj potreba priblížiť alebo oddialiť scénu s objektmi znázornenými v rozšírenej realite kvôli optimalizácii zobrazenia ich veľkosti. Ukážkou je komentár študentky Betky:

„Zobrazenie guľičiek bolo občas veľmi nepresné, keďže sa zobrazovali buď príliš blízko alebo ďaleko, preto bolo potrebné znova načítať povrch alebo zoomovať, aby bolo vidieť zreteľný počet guľičiek rozloženého čísla. Inak práca s appletom bola jednoduchá a určite vhodná pre žiakov 1. stupňa. Učiteľka má veľa možností na prácu v oblasti matematiky a riešenia vzťahov.“

6. Záver

V súčasnosti zavádzaný ŠVP pracuje s víziou troch pilierov kurikula stojacich na základoch, ku ktorým tiež patrí „prostredie bohaté na digitálne technológie, ktoré efektívne a bezpečne využívajú učitelia i žiaci vo výchove a vzdelávaní.“ (NIVAM, 2023, s. 4). S konkretizovaným a zmysluplným využívaním digitálnych technológií by sa mali študenti – budúci pedagógovia stretnúť už v rámci svojej pregraduálnej prípravy. Konkretizácia výberu vhodných tematických oblastí pre inkorporáciu AR do matematickej edukácie je diskutovaná vo viacerých štúdiách (Hnatová et al., 2024; Lipták, 2024; Mokriš et al., 2023; Prídavková, 2023). Zmyslupnosť výberu je v kontexte tohto článku vnímaná ako podpora prechodu medzi statickým a dynamickým prístupňovaním matematického edukačného obsahu.

Dosahovanie hlavných cieľov základného vzdelávania je deklarované prostredníctvom „vyučovania zameraného na nadobudnutie doménových a prierezových gramotností“ (NIVAM, 2023, s. 5), čím je zároveň deklarovaná potreba, priam nutnosť vzájomne prepájať jednotlivé vzdelávacie oblasti. V primárnej matematickej edukácii môžu ako spájajúce elementy slúžiť izomorfné slovné úlohy, ktoré napriek rôznym kontextom zasahujúcim do rôznych vzdelávacích oblastí, vedú k jednotnej stratégii ich matematického riešenia.

Ukazuje sa, že schopnosť identifikovať izomorfné úlohy, riešiť ich a spolu so žiakmi odhaľovať súvislosti medzi nimi v rôznych vzdelávacích oblastiach aj s pomocou digitálnych technológií, sa stáva pre budúceho pedagóga pôsobiaceho v primárnom vzdelávaní, nevyhnutnosťou.

Acknowledgements

Príspevok vznikol s podporou grantového projektu KEGA 024PU-4/2024 *Technológia rozšírenej reality a jej inkorporácia do matematickej prípravy študentov v študijnom programe Predškolská a elementárna pedagogika* riešeného na PF PU v Prešove.

Príspevok vznikol s podporou grantového projektu VEGA 1/0734/25 *Učenie sa v súvislostiach v matematickej edukácii - výskum možností integrácie doménových a prierezových gramotností v kontexte kurikulárnej transformácie* riešených na PF PU v Prešove.

Literatúra

- Amri, C., & Retnowati, E. (2024). Some isomorphic problems in proportion. *AIP Conference Proceedings*, 2622(1), 140009. <https://doi.org/10.1063/5.0133474>
- Bečvář, J., Bečvářová, M., & Vymazalová, H. (2003). Matematika ve starém Egyptě. In *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*. Prometheus, spol. s r. o. <https://eudml.org/doc/202377>
- Blömeke, S., Kaiser, G., König, J., & Jentsch, A. (2020). Profiles of mathematics teachers' competence and their relation to instructional quality. *ZDM*, 52, 1–14. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01128-y>
- Čižmár, J. (2017). Dejiny matematiky od najstarších čias po súčasnosť. Perfekt.
- Dagiene, V., Hromkovic, J., & Lacher, R. (2021). Designing informatics curriculum for K-12 education: From Concepts to Implementations. *Informatics in Education*, 20(3), 333–360. <https://doi.org/10.15388/infedu.2021.22>
- Di Serio, Á., Ibáñez, M. B., & Kloos, C. D. (2013). Impact of an augmented reality system on students' motivation for a visual art course. *Computers & Education*, 68, 586–596. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.03.002>
- Hannula, M., at all. (2016). Attitudes, Beliefs, Motivation, and Identity in Mathematics Education (s. 1–35). https://doi.org/10.1007/978-3-319-32811-9_1
- Hejný, M., Jirotková, D., Slezáková, J., Kuřík Sukniak, A., Strnad, V., & Ročák, Š. (2022). *Matematika 5. Ročník—Učebnica*. Indícia s r.o.
- Hejný, M., Jirotková, D., Slezáková-Kratochvílová, J., & Michnová, J. (2009). *Matematika 3*. Fraus.
- Hnatová, J. (2023). *Technológia rozšírenej reality v matematickej edukácii: SWOT analýza*. PU v Prešove. <https://elibrary.pulib.sk/elpub/document/isbn/9788055531038>
- Hnatová, J., Prídavková, A., & Lipták, J. (2024). *Rozšírená realita v primárnej matematickej edukácii. Analýza edukačných aktivít študentov – budúcich pedagógov*. Prešovská univerzita v Prešove. <https://elibrary.pulib.sk/elpub/document/isbn/9788055533698>
- Hromkovič, J., & Lacher, R. (2019). *Einfach Informatik 5/6 – Lösungen finden Schulbuch*. Klett und Balmer Verlag. <https://einfachinformatik.ch>

- Lipták, J. (2024). Analýza možností implementácie rozšírenej reality do kurzu rekreačná matematika. In *Transformácia edukácie v predprimárnom, primárnom a špeciálnom vzdelávaní v 21. storočí* (s. 418–426).
- Mokriš, M., Šimčíková, E., & Tomková, B. (2023). Riešenie rovníc v príprave učiteľov elementaristov. *Elementary Mathematics Education Journal*, 5(2), 25–33.
- NIVAM. (2023). Štátny vzdelávací program pre základné vzdelávanie. *Vzdelávanie 21. storočia*. <https://vzdelavanie21.sk/digitalny-statny-vzdelavaci-program/>
- Nováková, E. (2020). Žáci, učitelé a Cvrček: „dělali jsme Cvrčka“ – a co dál? *Učitel matematiky*, 28(4), 194–207.
- Petráčková, V., & Kraus, J. (2005). *Slovník cudzích slov (akademický)* (J. Balážová & J. Bosák, Ed.; 2. doplnené a prepracované vydanie). Slovenské pedagogické nakladateľstvo – Mladé letá. <https://slovník.juls.savba.sk/>
- Porubský, Š. (2009). Ako rýchlo vieme a môžeme násobiť. In J. Bečvář & M. Bečvářová (Ed.), *30. Mezinárodní konference Historie matematiky* (s. 173–179). MATFYZPRESS.
- Prídavková, A. (2023). Modelling of elementary mathematical concepts using augmented reality technology in primary education. *EDULEARN23 Proceedings*, 7249–7254. <https://doi.org/10.21125/edulearn.2023.1893>
- Reed, S. K. (1987). A structure-mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 13(1), 124–139. <https://doi.org/10.1037/0278-7393.13.1.124>
- Tomová, A. (2015). Princip izomorfismu v učitelské přípravě. *Pedagogika*, 65(1), 75–81.
- Vymazalová, H. (2004). Zkusme měřit měřicí. *PRAGUE EGYPTOLOGICAL STUDIES*, 3, 159–167.
- Wossala, J., & Seidlová, P. (2022). Matematická gramotnost v kontextu nového pojetí informatiky. *Elementary Mathematics Education Journal*, 4(2), 46–55.

THE FIRST VIEW AT MATHEMATICAL EDULARP IN PRIMARY EDUCATION IN CONTEXT OF CONTEXTUAL TEACHING AND LEARNING APPROACH

Dominika KUŠNÍROVÁ, Iveta SCHOLTZOVÁ
University of Presov, Faculty of Education (Slovakia)
dominika.kusnirova@smail.unipo.sk, iveta.scholtzova@unipo.sk

Abstract

The paper explores how mathematics can be applied in real-life situations for primary school students by creating tasks that connect mathematical learning to everyday contexts. This approach is grounded in the concept of Contextual Teaching and Learning (CTL). The aim of the paper is to introduce the CTL concept and examine its potential in primary education. Specifically, the article focuses on the use of Education Live Action Role-Playing (EduLARP) as a method for implementing CTL in primary-level mathematics education. The EduLARP method has been chosen as the main method for introducing CTL in our research. Additionally, the paper presents examples of international mathematical EduLARP projects.

Keywords: mathematics, contextual teaching and learning, EduLARP, primary education

1. Introduction

Improving the quality of education is also a priority in the Slovak educational environment, where systematic efforts to enhance educational outcomes – including in mathematics – are evident. One such initiative is the proposal by the *State Pedagogical Institute*, which developed the document *Concept for Improving Mathematics Education in Primary and Secondary Schools in the Slovak Republic* (2019). This document is based on the results of the PISA and TIMSS assessment studies and highlights the dissatisfaction of employers who believe that graduates are insufficiently competent in applying acquired knowledge to real-life situations.

The document presents recommendations, including the need to actively involve students in mathematical activities, promote learning through the application of knowledge to real-life situations, and establish connections between mathematics and other subjects. The emphasis on learning for life is also reflected in the current curriculum reform. This reform aims to shift the focus from memorization and rote learning to contextualizing knowledge, with the goal of deepening the learning process and developing the ability to make connections and apply knowledge in various contexts (Ministry of Education, Research, Development and Youth of the Slovak Republic, 2023). This idea has been addressed in the context of mathematics education by Costello (2022), who described students' mathematical problem-solving as blindly following procedures. This phenomenon manifests in the educational process as a gap between lesson objectives and the actual learning experiences achieved by students, as they apply mathematical operations in an automated manner – without deeper reflection. According to the author, the problem lies in the lack of real-life context.

Considering these findings, we decided to explore ways to strengthen mathematical knowledge and skills among younger students. We chose the EduLARP method to implement tasks set in real-life situations, based on the concept of learning in context. The potential of this method in Slovakia was discussed by Grenčíková, Petrušová, and Krajčo (2018), who found that its application in the Slovak educational context is currently minimal.

2. The Concept of Contextual Teaching and Learning in Educational Processes

According to Johnson (2002) CTL is a pedagogical approach that suggests meaning emerges from the relationship between content and its context. The broader the context in which learners can make connections, the more meaningful the content becomes to them. The teacher's role is to provide this context for students. CTL facilitates the linking of learning content to real-life situations. It is recommended to be taught in an integrated, multidisciplinary manner, enabling students to apply the knowledge and skills they have acquired in applicable contexts (Berns & Erickson, 2001). The goals of education should extend beyond the acquisition of knowledge to its practical application (Johnson, 2002).

The implementation of contextual learning into the educational process can be achieved through active and authentic learning techniques (Hudson & Whisler, 2007; Blanchard, 2001; Osika et al., 2022). According to Meyers and Jones (1993), active learning techniques transition learners from passive recipients to active participants, thereby maximizing the impact of learning on students. Bean (2011) recommends employing case studies, role-playing, small group work, and creative activities that develop thinking skills and can be applied to specific situations.

In addition to the previously mentioned use of active and authentic learning techniques, specific Contextual Teaching and Learning (CTL) strategies are identified. Blanchard (2001) includes: emphasizing problem-solving; recognizing the need for learning in context; teaching students to monitor and manage their own learning; embedding instruction in students' life contexts; promoting peer learning; and employing authentic assessment.

Johnson (2002) identified eight components of CTL that complement Blanchard's (2001) strategies. Both authors agree on the necessity of guided and reciprocal learning, authentic assessment, and linking learning to meaningful life contexts. Additionally, Johnson (2002) highlights collaboration, the development of critical and creative thinking, and the pursuit of improved performance as essential components of CTL.

Research by Selvanires and Prabawanto (2017) and Spooner (2023) offers recommendations for effective CTL implementation. Both studies emphasize, alongside collaboration and activity (as noted by Johnson, 2002), the integration with other content areas to provide students with more complex contextual understanding.

Interdisciplinarity in mathematics education has been the subject of scholarly studies, including the work of Dewolf et al. (2011), building upon the research of Säljö, Riesbeck, and Wyndhamn (2009). The researchers investigated the impact of the subject taught on students' problem-solving abilities. The results revealed significant differences in solving the same problem across two different teaching subjects. The authors interpreted this difference as a result of expected and typical responses in mathematics instruction, where students accept numerical solutions without considering the broader real-world context – a claim also made by Costello (2022). Research suggests the need to develop more authentic tasks that simulate real-world problems and integrate interdisciplinary approaches into mathematics education. This integration aims to extend students' mathematical thinking beyond the confines of the mathematics classroom.

The aforementioned strategies for effective CTL implementation 're complementary and overlapping. Therefore, the REACT strategy – comprising Relating, Experiencing, Applying, Cooperating, and Transferring – can be considered a unifying CTL framework. According to Herlina (2022) and the Center for Occupational Research and Development (CORD, 2023), REACT serves as the primary CTL strategy.

REACT encompasses the elements identified by Blanchard (2001), Johnson (2002), and Selvaniresa and Prabawanto (2017), forming a coherent CTL approach. We present this strategy and its components in more detail in Table 1.

Table 1. REACT Strategy

REACT	
Relating	the context of everyday life enables students to connect familiar situations with new knowledge;
Experiencing	the method for developing knowledge involves exploration, discovery, and problem-solving;
Applying	learning through the application of new concepts and information within real-life contexts;
Cooperating	sharing, responding, and communicating with peers through group activities and projects;
Transferring	applying acquired knowledge to new situations and contexts.

The components of the REACT strategy should be integral to every teaching unit that embodies the core principles of the Contextual Teaching and Learning (CTL) approach.

3. Elements of the EduLARP Method

Building upon the recommendations for integrating Contextual Teaching and Learning (CTL) into the classroom, we have chosen to implement this concept through the EduLARP method. EduLARP evolved from traditional Live Action Role-Playing (LARP) games (Stark, 2012). Bøckman (2003) defines LARP as a role-playing game in which participants assume the roles of characters and enact a fictional narrative. In academic literature, two variations of the term exist: the capitalized "EduLARP" (e.g., Mochocki, 2013; Veselková, 2017) and the lowercase "edularp" (e.g., Sandberg, 2004; Stark, 2012; Geneuss, 2019; Rönnåsen, 2022). According to Stark (2012), the differences in terminology arise from the domestication of the term "LARP." In Nordic countries (Finland, Sweden, Denmark, Norway), "LARP" has been adapted into the language as a full-meaning word, like how "laser" (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) and "radar" (Radio Detection and Ranging) are used and is written without capital letters.

In the context of EduLARP, participants are divided into:

- **Player Characters (PCs):** Students who actively participate in the game by assuming roles and improvising within the narrative, thereby applying their learning in dynamic, real-world scenarios.
- **Non-Player Characters (NPCs):** These participants do not engage in the game through character roles. Instead, they facilitate interactions with PCs, possessing crucial information that can be revealed to the PCs at strategic points during the game.

- Game Master (GM): The GM oversees the entire game, providing NPCs with instructions as needed to ensure the smooth progression of the narrative and gameplay.

In the educational context, the term EduLARP is used to denote a specific category of LARP games designed for pedagogical purposes (Maragliano, 2019). EduLARP refers to a form of role-playing that conveys predetermined educational content (Balzer & Kurz, 2015). According to Hyltoft (2010), an educational EduLARP game must fulfill the following criteria:

- Educational Goal: The primary element of an EduLARP game, applicable across various lesson types – whether introducing new knowledge (Hyltoft, 2010; Mochocki, 2013) or reinforcing learning (Kundrát, 2022);
- Live Action: The game is based on interactive participation among individuals;
- Role-Playing: Incorporation of role-playing elements, including a narrative, characters, and rules (Hyltoft, 2010).

The structure of EduLARP can be examined concerning its phases (Maragliano, 2019) and its organization (Balzer, 2009; Kundrát & Doleček, 2014). Specifically, Maragliano (2019) delineates the phases of EduLARP into five parts (Figure 1).



Figure 1. Phases of EduLARP

- Ice-Breaking Phase: This phase focuses on preparing the group and creating a welcoming atmosphere. Preparatory activities are used to establish a non-judgmental environment conducive to open participation;
- Workshop Phase: Participants are introduced to the rules and boundaries of the game. During this stage, they become familiar with their assigned roles and the structure of the EduLARP;
- Game Phase: This is the core stage, during which the EduLARP is actively implemented, and participants engage in role-playing based on the defined narrative and objectives;
- Deroling Phase: This phase facilitates the transition out of character, allowing participants to gradually return to their real identities after the game concludes;
- Debriefing Phase: In this reflective phase, participants provide feedback and discuss their experiences. It serves to process the emotional and cognitive impacts of the game. This includes areas of reflection such as Emotions, Individual experiences, Analysis of the gameplay, Contextualization and real-life connections, Generalization, Educational insights (Maragliano, 2019).

The organizational structure of EduLARP design has been addressed by various authors, including Balzer (2009) and Kundrát & Doleček (2014). A detailed classification of the organizational steps proposed by these authors is presented in Table 2.

Table 2. Organizational Structure of EduLARP

EduLARP Organizational Structure	
Preparation phase, constraints	The requirements of the game should be specified before the start of development (e.g., number and type of participants, age category).
Educational content	Define the educational content and objectives that the game is intended to convey.
Creation phase - Storytelling	Define elements related to the game's story, such as the selection of a key theme or fictional world, choice of genre, development of the initial concept, and creation of characters (with the option for players to complete or customize their characters).
Game mechanics	Define the rules of the game, including both regulatory and constitutive elements.
External settings	Identify the elements related to the game that are not an immediate part of gameplay (e.g., preparation, warm-up, debriefing).
Game materials	Specify the materials and texts that players will have access to before, during, or after the game.

These categories can serve as inspiration for the development of original EduLARP games. Balzer (2009) emphasizes that the number and structure of these categories can be adjusted to suit the specific needs of an individual EduLARP.

In Slovakia, EduLARP has received minimal attention, as noted by Grenčíková, Petrušová, and Krajčo (2018). In contrast, some of Slovakia's neighboring countries have shown slightly more interest in this educational approach. In Poland, the pedagogical potential of EduLARP was discussed by Mochocki (2013), who attributes the initial mention to the literary playwright Szej. Szej argued that Tabletop Role-Playing Games (TTRPGs) could lead to similar educational outcomes as dramatic techniques. Despite this, Mochocki (2013) highlights that the method remains largely unfamiliar within the Polish educational context and stresses the need for broader awareness.

In the Czech Republic, EduLARP development is supported by the organization EduLudus, which is dedicated to the creation and implementation of educational LARP games. In 2018, EduLudus developed and validated five EduLARP games – *Magic Guilds*, *Mesozoic Park*, *Orteg's challenge*, *Singularity*, *TeraforMars* – focusing on mathematics at the lower secondary level, with interdisciplinary links to other science subjects (EduLudus, 2018).

4. Methodology

Based on the literature reviewed, our research focuses on a model of contextual learning aimed at strengthening the mathematical thinking of primary school students through real-life contexts. Drawing from theoretical knowledge of CTL strategies and the organizational phases of EduLARP, we will design a mathematical EduLARP aligned with the 4th-grade primary education curriculum objectives and requirements. Specifically, we are interested in:

- The problem-solving procedures employed by students when addressing problems that simulate real-life situations;
- The relationship between the type of mathematical problem and students' ability to apply knowledge in solving it;
- Students' evaluation of the EduLARP educational environment and the EduLARP method itself.

We have chosen qualitative research, employing the Design-Based Research (DBR) methodology. This approach was inspired by the STARS (Student Activating Role-playing Games) study, which applied this methodology to validate EduLARP games in primary schools in Bavaria (Geneuss, 2019). The DBR methodology involves iterative cycles of design, implementation, analysis, and refinement to create effective educational interventions. The stages of our research correspond to the characteristics of DBR and include:

1. Designing a mathematical EduLARP;
2. Creating mathematical tasks that connect real life with mathematics;
3. Conducting a DBR cycle to validate the difficulty of the mathematical tasks – Implementing the tasks in classroom settings, collecting data on student performance, and analyzing the appropriateness of task difficulty.
4. Qualitative Analysis of Collected Data – analyzing students' solutions, responses, and observation sheets to assess problem-solving procedures.
5. Implementation of Mathematical EduLARP
6. Analysis of Results – Evaluating the EduLARP game through: Qualitative content analysis of students' answers, Analysis of written solutions, focusing on problem-solving procedures, Examination of observation sheets to identify patterns;
7. DBR Interventions – Implementation of new elements – refining and enhancing the EduLARP intervention based on analysis results, incorporating new elements to improve effectiveness.
8. The final mathematical EduLARP game.

5. Conclusion

The analysis of the theoretical foundations of the CTL suggests that its application in primary-level mathematics education can effectively facilitate the transfer of knowledge to real-life contexts. We assume that the experiences gained through the EduLARP game, along with individual role-playing activities, can enhance students' understanding of how mathematics is used in practical, everyday situations.

Acknowledgements

This article was supported by the Scientific Grant Agency of the Slovak Republic (VEGA) project No. 1/0734/25 Contextual Teaching and Learning in Mathematics Education – Research on the Possibility of Integrating Domain and Cross-Cutting Literacies in the Context of Curricular Transformation.

References

- Balzer, M., & Kurz, J. (2015). *Learning by Playing – Larp As a Teaching Method*. <https://nordiclarp.org/2015/03/04/learning-by-playing-larp-as-a-teaching-method/>
- Bartenstein, L. (2024). Live Action Role Playing (Larp) in Cognitive Behavioral Psychotherapy: A Case Study. *International Journal of Role-Playing*, (15), 92–126. <https://doi.org/10.33063/ijrp.vi15.322>
- Bean, J. C. (2011). *Engaging ideas: The professor's guide to integrating writing critical thinking and active-learning in the classroom (2nd ed.)*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Berns, R. G., & Erickson, P. M. (2001). *Contextual Teaching and Learning: Preparing Students for the New Economy*. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED452376.pdf>
- Blanchard, A. (2001). *Contextual Teaching and Learning*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Böckman, P. (2003). The Three Way Model: Revision of the Threefold Model. In: Gade, M., Thorup, L., Sander, M. (Eds.). *As LARP Grows Up. Frederiksberg: Projektgruppen KP03*. <https://nordiclarp.org/w/images/c/c2/2003-As.Larp.Grows.Up.pdf>
- Center for Occupational Research and Development. (2023). *REACTing to Learn: Student Engagement Strategies in Contextual Teaching and Learning*. <https://www.cord.org/wp-content/uploads/2023/05/REACT-flyer-ABE-revised-footer.pdf>
- Costello, D., (2022). *Mathematizing Student Thinking: Connecting Problem Solving to Everyday Life and Building Capable and Confident Math Learners*. Canada: Pembroke publishers.
- Dewolf, T., et. al. (2011). Upper elementary school children's understanding and solution of a quantitative problem inside and outside the mathematics class. *Learning and Instruction* 21(6) 770–780. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2011.05.003>
- EduLudus. (2018). *Matematické edularpy*. <https://www.eduludus.cz/matematicke-edularpy/p-ixmtewoa/1/>
- Geneuss, K. (2019). The Use of the Role-playing Technique STARS in Formal Didactic Contexts. *International Journal of Role-Playing*, (11), 114–131. <https://journals.uu.se/IJRP/article/view/286/195>
- Grenčíková, A., Petrušová, D., & Krajčo, K. (2018). Possibilities of Using Edularp in Education in Slovak Republic. *ERAZ 2018: Knowledge Based Sustainable Economic Development Conference Proceedings*. 506–512. https://eraz-conference.com/wp-content/uploads/2019/12/eraz_2021.pdf
- Herlina, E. (2022). The Implementation of REACT Strategy in Training Students; Higher Order Thinking Skills (HOTS). *Ta'dib Journal*, (25) 47–57. <https://ejournal.uinmybatusangkar.ac.id/ojs/index.php/takdib/article/view/5049>
- Hudson, CH. C., & Whisler, R. W. (2007). Contextual Teaching and Learning for Practitioners. *Systemics, Cybernetics and Informatics*, (6), 54–58. <https://www.iiisci.org/Journal/pdv/sci/pdfs/E668PS.pdf>
- Hyltoft, M. (2010). Four reasons why edu-larp works. In: Dombrowski, K. (2010) *LARP: Einblicke. Aufsatzsammlung zum Mittelpunkt*. Germany: Zauberfeder, 43–57. https://thenoon.ru/files/documents/file_74d48f19a41a0db0c5fe0dcd15763464.pdf

- Johnson, E. B. (2002). *Contextual teaching and learning: what it is and why it's here to stay*. Thousand Oaks, Calif.: Corwin Press
- Kundrát, J. (2022). Roots and Anchoring of EduLARPs. In: Benešová, T. et al. (2022) *Mathematics Edularp, Educational live action role playing game in Mathematical Context*. 11–18. https://edularp.vsb.cz/wp-content/uploads/2022/09/mathematics_edularp_2022.pdf
- Kundrát, J., & Doleček, J. (2014) *Metodika pro tvorbu larp do školní výuky, jako jedné z moderních metod výuky*. Centrum dopravního výzkumu, v.v.i., Brno. <https://www.cdv.cz/file/metodika-prace-s-larp-pro-vychovu-a-vzdelavani-deti-a-mladeze-03/>
- Lankard, B. (1995). *New ways of learning in the workplace*. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED385778.pdf>
- Maragliano, A. (2019). Edu-larp Paths in Education: A Pedagogic Research on Ethnic Prejudice and Empathy through Games. *International Conference the Future of Education*, (9), 455–462. <https://conference.pixel-online.net/files/foe/ed0009/FP/5814-LGM3956-FP-FOE9.pdf>
- Maragliano, A. et. al. (2021). Starflyer: An edu-larp Project for Ethic and Math teaching and Learning. *Proceedings of the 15th European Conference on Game Based Learning*. Brighton: Academic Conferences International Limited, 947–955.
- Meyers, C. & T. B. Jones (1993). *Promoting Active Learning: Strategies for the College Classroom*. San Francisco, CA: Jossey-Bass
- Mochocki, M. (2013). Edu-Larp as Revision of Subject-Matter Knowledge. *International Journal of Role-Playing*. (4), 55–75. <https://journals.uu.se/IJRP/article/view/229/308>
- Ministry of Education, Research, Development and Youth of the Slovak Republic (2023). *Štátny vzdelávací program pre základné vzdelávanie*. https://www.minedu.sk/data/files/11808_statny-vzdelavaci-program-pre-zakladne-vzdelavanie-cely.pdf
- Osika, A. et. al. (2022). *Contextual learning: linking learning to the real world*. The University of Queensland. <https://www.timeshighereducation.com/campus/contextual-learning-linking-learning-real-world>
- Rönnåsen, M. (2022). *Leading With Larp Magic* <https://nordiclarp.org/2022/10/17/leading-with-larp-magic/>
- Sandberg, C., (2004). Genesi. LARP Art, Basic Theories. In: Montola, M. & J., Stenros (2004). *Beyond Role and Play tools, toys and theory for harnessing the imagination*. 265–286. <https://nordiclarp.org/w/images/8/84/2004-Beyond.Role.and.Play.pdf>
- Säljö, R., Riesbeck, E., & Wyndhamn, J. (2009). Learning to model: coordinating natural language and mathematical operations when solving word problems. In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds: Modelling verbal descriptions of situations*. 177–193. Rotterdam: Sense Publishers.
- Selvianiresa, D. & Prabawanto, S. (2017). Contextual Teaching and Learning Approach of Mathematics in Primary Schools. *Journal of Physics* (895). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/895/1/012171>
- Spooner, K. (2023). Using mathematical modelling to provide students with a contextual learning experience of differential equations. *International Journal Of Mathematical Education in Science and Technology*, 55(2) 565–573. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2244472>

- Stark, L. (2012). *Leaving mundania: Inside the transformative world of live action role-playing games*. Chicago, IL: Chicago Review Press.
- Surya, E., Putri A., F. & Mukhtar, M. (2017). Improving mathematical problem-solving ability and Self-confidence of high school students through Contextual learning model. *Journal on Mathematics Education*, (8), 85–94. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1173627.pdf>
- Syaiful Syamsuddin, Edi Istiyono; The effectiveness of mathematics learning through contextual teaching and learning approach in Junior High School. *AIP Conf. Proc.* 21 September 2018; 2014 (1): 020085. <https://doi.org/10.1063/1.5054489>
- State Pedagogical Institute (2019). *Koncepcia skvalitnenia matematického vzdelávania na základných a stredných školách v SR*. https://www.statpedu.sk/files/sk/pre-verejnost/verejne-pripomienkovanie/koncepcia-skvalitnenia-matematickeho-vzdelavania/koncepcia_navrh.pdf
- Veselková, I. (2017). *EduLARP – cesta k zážitkové pedagogice*. <https://www.rizeniskoly.cz/casopisy/rizeni-skoly/edularp-cesta-k-zazitkove-pedagogice.m-3238.html>

MATEMATICKÁ KOMPETENCIA A JEJ ROZVOJ U ŠTUDENTOV UČITEĽSTVA PRE PRIMÁRNE VZDELÁVANIE VYUŽITÍM TECHNOLÓGIE ROZŠÍRENEJ REALITY

Alena PRÍDAVKOVÁ

Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (Slovenská republika)

alena.pridavkova@unipo.sk

Abstrakt

Matematická kompetencia je schopnosť rozvíjať a aplikovať matematické myslenie na riešenie rôznych problémov v každodenných situáciách. Zahŕňa schopnosť a ochotu používať matematické modely myslenia a rôzne reprezentácie. Analýza vedeckých prác poukazuje na existenciu viacerých prístupov k vymedzeniu matematickej kompetencie a jej modelov tvorených rôznymi komponentami. Matematická kompetencia študentov - budúcich učiteľov môže byť rozvíjaná integráciou technológie rozšírenej reality do edukácie (Augmented Reality – AR), ktorá podporuje porozumenie abstraktných matematických pojmov, aktívne učenie a zvyšuje motiváciu. Parciálne výsledky realizovanej analýzy produktov študentov, budúcich učiteľov na primárnom stupni vzdelávania, naznačujú potenciál technológie AR pri rozvíjaní vybraných komponentov matematickej kompetencie.

Kľúčové slová: matematická kompetencia, príprava učiteľov, primárne vzdelávanie, technológia rozšírenej reality

MATHEMATICAL COMPETENCE AND ITS DEVELOPMENT WITHIN STUDENTS ENROLLED IN TEACHING IN PRIMARY EDUCATION PROGRAMME USING AUGMENTED REALITY TECHNOLOGY

Abstract

Mathematical competence is the ability to develop and apply mathematical thinking to solve various problems arising in everyday situations. It includes both the ability and the willingness to use mathematical models of thinking and various forms of representation. An analysis of scientific literature points to the existence of multiple approaches to defining mathematical competence and its models, which consist of different components. The mathematical competence of students – future teachers – can be enhanced by integrating Augmented Reality (AR) technology into the educational process. AR supports the understanding of abstract mathematical concepts, promotes active learning, and increases student motivation. Partial results from an analysis of the students' work, the future teachers at primary level of education, indicate the potential of AR technology to support the development of selected components of mathematical competence.

Keywords: mathematical competence, teaching training, primary education, Augmented Reality technology

1. Úvod

Matematická kompetencia je, podľa Odporúčania Európskeho parlamentu a rady (2006), charakterizovaná v zmysle schopnosti rozvíjať a aplikovať matematické myslenie na riešenie rôznych problémov v každodenných situáciách. Implikuje schopnosť a ochotu využívať matematické modely myslenia a rôzne reprezentácie abstraktných pojmov. V akademickom diskurze existuje viacero prístupov k vymedzeniu a interpretácii daného pojmu, v ktorých sú modely matematickej kompetencie tvorené rôznymi komponentami. Charakter komponentov vychádza z majoritných vlastností špecifikovaných autormi toho ktorého opisu (Kilpatrick, 2009; Niss a Højgaard, 2019; Piñero Charlo et al., 2022).

Viaceré štúdie potvrdzujú pozitívny vplyv integrácie technológie rozšírenej reality do edukácie (Augmented Reality – AR) na mieru porozumenia abstraktných matematických pojmov, podporu aktívneho učenia sa a na zvyšovanie motivácie študentov (Boras, 2022; Hnatová et al., 2024; Koparan et al., 2023), čo v konečnom dôsledku prispieva aj k rozvoju ich matematickej kompetencie.

Predstavené budú parciálne výsledky kvalitatívnej analýzy produktov práce študentov, budúcich učiteľov na primárnom stupni vzdelávania (na Pedagogickej fakulte PU v Prešove). Študentské výstupy, vo forme seminárnych prác, obsahovali návrhy edukačných aktivít pre vyučovanie matematiky s podporou technológie AR. Parciálne výsledky ukazujú na potenciál technológie AR pre rozvoj matematickej kompetencie budúcich učiteľov na primárnom stupni vzdelávania a zároveň ponúkajú odporúčania pre jej efektívne začlenenie do ich matematickej prípravy.

2. Matematická kompetencia – vymedzenie pojmu

Analyzované a komparované boli tri rôzne vymedzenia pojmu matematická kompetencia. Pre potreby nášho skúmania bola, na základe analýzy predmetných definícií a cieľov výskumu, zvolená a aplikovaná jedna definícia (Piñero Charlo et al., 2022).

Niss a Højgaard (2019) prezentujú matematické kompetencie v zmysle kognitívneho konštruktú a schopnosti aktívne robiť matematiku. Podľa autorov vedieť matematiku znamená ovládať vedomosti, definície pojmov, algoritmy, vzorce a pod. V tomto modeli je fokus orientovaný na vedomosti z oblasti matematiky, ale neopomína sa význam porozumenia, komunikovania a aplikácie matematiky. Model matematickej kompetencie (obr. 1) tvorí osem kľúčových kompetencií, ktoré sú dôležité pri vyučovaní a učení sa matematiky (označenie kompetencií je uvádzané v origináli):

Representation Competency – schopnosť vytvárať rôzne typy reprezentácií matematických pojmov a pracovať s nimi (manipulatívne, ikonické, symbolické; graf, tabuľka, rovnica a pod.).

Symbols and Formalism Competency – schopnosť pracovať s matematickými symbolmi na primeranej úrovni (napr. rovnice, nerovnice, algebrické výrazy) a používať formálny jazyk matematiky.

Communication Competency – schopnosť komunikovať myšlienkové postupy verbálne alebo písomne.

Aids and Tools Competency – schopnosť efektívne využívať učebné pomôcky a iné nástroje, ako sú manipulatívne učebné pomôcky, kalkulačky, digitálne modely matematických pojmov (napríklad AR, VR).

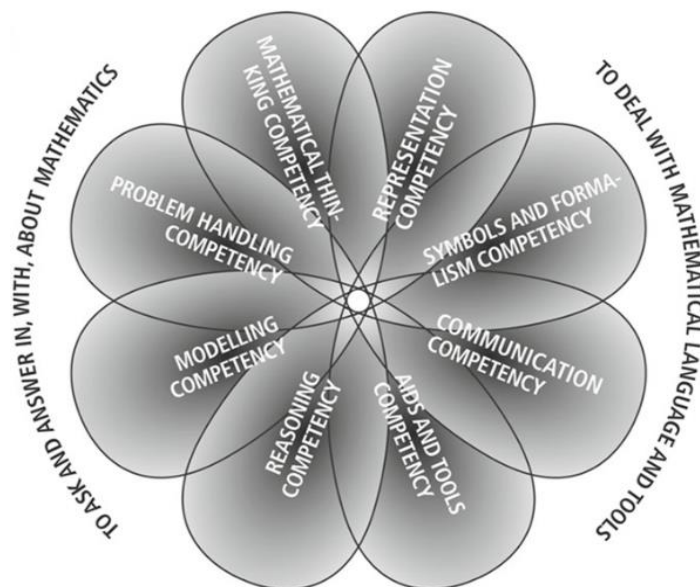
Reasoning Competency – schopnosť uvažovať, argumentovať, dokazovať a posudzovať zmysel a platnosť tvrdení.

Modelling Competency – schopnosť vytvárať matematické modely reálnych javov a situácií.

Problem Handling Competency – schopnosť riešiť matematické problémy hľadaním a aplikovaním primeraných a efektívnych stratégií.

Mathematical Thinking Competency – schopnosť korektne matematicky myslieť, rozvíjať a rozpoznávať matematické pojmy a problémy.

Okrem uvedených kompetencií sú v modeli špecifikované dve oblasti: (1) *To ask and answer in, with, about mathematics*, v zmysle schopnosti formulovať primerané otázky a (2) *To deal with mathematical language and tools*, ktorá zdôrazňuje význam jazyka a iných prostriedkov.



Obrázok 1. Vizuálna reprezentácia matematických kompetencií (Niss a Højgaard, 2019)

Na druhej strane Kilpatrick (2009) obohacuje daný koncept o ďalšie elementy. Vytvoril tzv. *rope model* (obr. 2), v ktorom sú jednotlivé „vlákna lana“ (komponenty, zložky) rozvíjané súčasne, paralelne, nie postupne jeden po druhom. Jednotlivé časti lana sú prepletené, navzájom na sebe závislé. Popisujú súbor vedomostí, zručností, schopností a presvedčenia, ktoré vychádzajú z výskumov v oblasti kognitívnej psychológie a matematického vzdelávania a vytvárajú obraz matematicky zdatného žiaka (*mathematically proficient student*).

Model tvorí päť zložiek matematickej spôsobilosti/gramotnosti (*mathematical proficiency*):

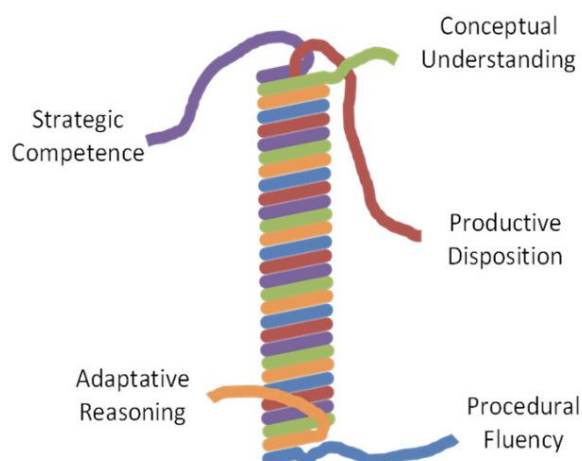
Porozumenie pojmom (*Conceptual Understanding*) – chápanie matematických pojmov, operácií a vzťahov, napr. vedieť *prečo* platí daný vzťah, nielen *ako* ho využiť, či vypočítať úlohu.

Strategická kompetencia (*Strategic Competence*) – schopnosť formulovať, reprezentovať a riešiť matematické problémy na základe výberu primeraných stratégií a prístupov.

Produktívny postoj k matematike (*Productive Disposition*) – vnútorná motivácia a presvedčenie o vnímaní zmysluplnosti a užitočnosti matematiky.

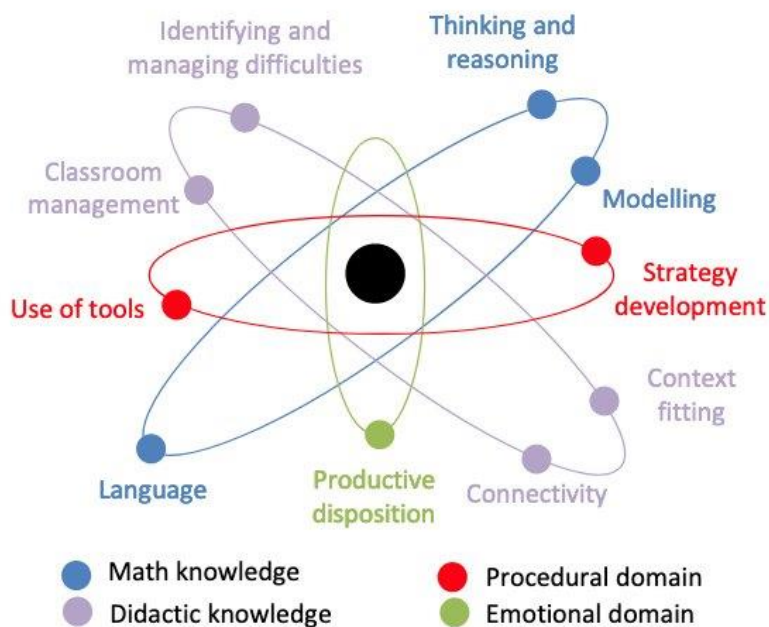
Adaptívne uvažovanie (*Adaptive Reasoning*) – schopnosť logicky uvažovať a flexibilne meniť prístup k riešeniu problémov v závislosti od podmienok.

Procedurálna plynulosť (*Procedural Fluency*) – schopnosť efektívne a presne používať matematické postupy a algoritmy.



Obrázok 2. Model matematických kompetencií (Kilpatrick, 2009)

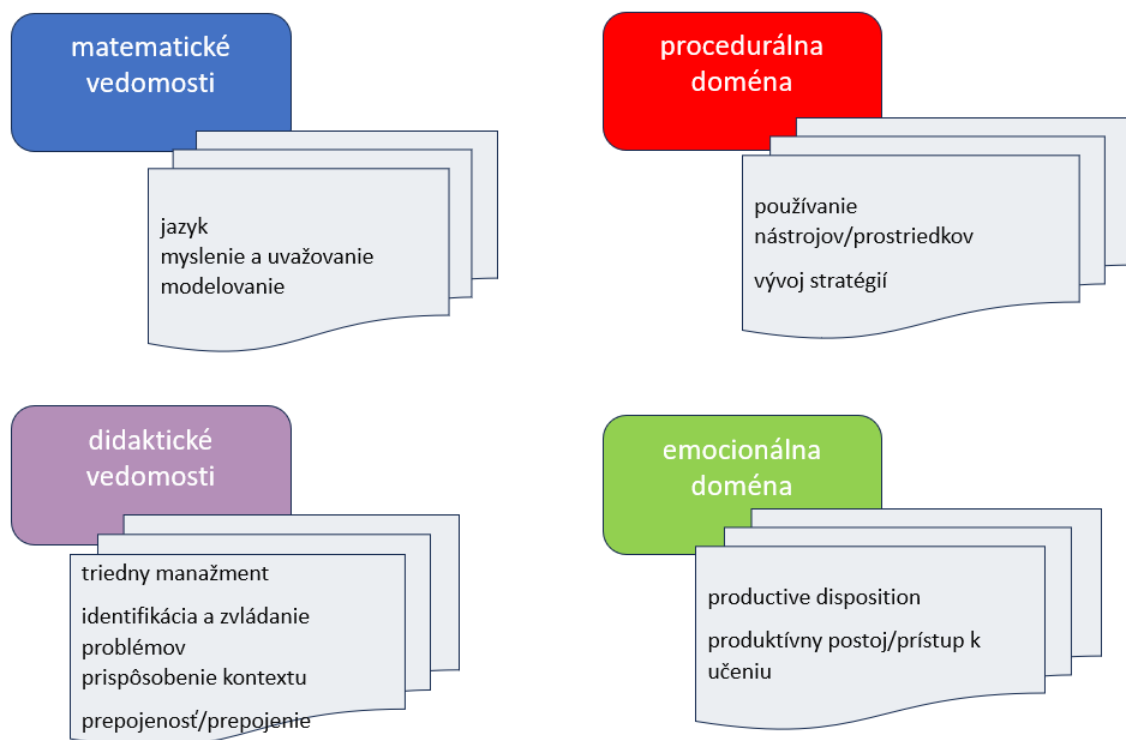
Kilpatrick (2009) uvažuje o emocionálnych faktoroch, ale menej pozornosti je venovanej špecifickým vedomostným, procedurálnym položkám. Kombináciou dvoch spomenutých modelov bol navrhnutý (Piñero Charlo et al., 2022) model pojmu matematická kompetencia, tvorený štyrmi doménami: matematické vedomosti, didaktické vedomosti, procedurálna doména, emocionálna doména (obr. 3)



Obrázok 3. Vizualizácia profesionálnych kompetencií učiteľa matematiky (Piñero Charlo et al., 2022)

Bližšie charakterizujeme jednotlivé komponenty predmetného modelu (obr. 4), ktorý bol aplikovaný v procese analýzy produktov prác študentov.

Matematická kompetencia



Obrázok 4. Komponenty matematickej kompetencie (spracované podľa Piñero Charlo et al., 2022)

- (1) Komponent *matematické vedomosti* je tvorený elementami *jazyk*, *myslenie a uvažovanie*, *modelovanie*. Komponent sa týka matematických poznatkov, ktoré by mal mať učiteľ osvojené. Dôležité je, aby učiteľ disponoval matematickými vedomosťami, rozumel konceptom, mal osvojené zručnosti a schopnosti pre ich vysvetlenie a uplatnenie na rôznych stupňoch vzdelávania.
 - Jazyk – táto schopnosť zahŕňa používanie matematických symbolov, formálnych zápisov a komunikačného jazyka. Kompetencia súvisí so schopnosťou pracovať s matematickými symbolmi a s pravidlami pre ich úpravu. Zároveň je spojená so schopnosťou zapájať sa do písomnej, verbálnej, vizuálnej matematickej komunikácie v rôznych štýloch a jazykových rovinách.
 - Myslenie a uvažovanie – schopnosť formulovať otázky v danej oblasti, rozumieť podstate očakávaných odpovedí. Ide o dokazovanie matematických tvrdení, kritickú analýzu a posudzovanie iných zdôvodnení.
 - Modelovanie – schopnosť vytvárať matematické modely a kriticky hodnotiť a analyzovať navrhované modely matematických konceptov.
- (2) *Didaktické vedomosti* zahŕňajú schopnosti ako *triedny manažment*, *identifikácia a zvládanie problémov*, *prispôsobenie kontextu* a *prepojenosť/prepojenie*. Učiteľ by mal byť schopný efektívne plánovať a organizovať výučbu, voliť metódy a formy s ohľadom na cieľovú skupinu (ich schopnosti, úroveň poznania a vedomostí) a tieto elementy navzájom prepájať.

- (3) *Procedurálna doména* obsahuje používanie nástrojov, prostriedkov a vývoj stratégií. Je to schopnosť učiteľa viesť žiakov k využívaniu rôznych stratégií, pomôcok, nástrojov, podporných techník s cieľom riešenia matematických úloh a problémov. Nutným predpokladom je učiteľov prehľad o existujúcich nástrojoch a skúsenosti z práce s nimi.
- Používanie nástrojov (prostriedkov) – táto kompetencia súvisí s prácou s materiálnymi prostriedkami a pomôckami pri matematických činnostiach, od konkrétnych 3D/fyzických objektov a modelov, cez špeciálne navrhnuté obrázky, ilustrácie, či tabuľky, až po široké spektrum digitálnych technológií určených na znázorňovanie situácií a konceptov v matematike.
 - Vývoj stratégií – schopnosť formulovať, znázorniť a riešiť matematické problémy v rámci aj naprieč rôznymi matematickými doménami, ako aj schopnosť kriticky analyzovať a hodnotiť rôzne prístupy k riešeniu problému. Táto kompetencia zahŕňa aj schopnosť vykonávať postupy flexibilne, presne, efektívne a primerane.
- (4) A nakoniec štvrtý komponent modelu matematickej kompetencie *emocionálna doména* je reprezentovaná tzv. *productive disposition*, čo môže byť interpretované v zmysle produktívneho postoja, prístupu k učeniu matematiky. Učiteľ by mal byť schopný motivovať žiakov, podporovať ich sebadôveru a rozvíjať pozitívny prístup k matematike. Táto doména zahŕňa aj schopnosť učiteľa primerane reagovať na prípadný neúspech žiaka.

Vyučovanie matematiky nie je len o ovládaní matematických pojmov v teoretickej rovine. Ide aj o schopnosti učiteľa tieto koncepty efektívne komunikovať, podporovať žiakov, vytvárať prostredie, v ktorom sa žiaci môžu matematike venovať so záujmom, dôverou. Tieto kompetencie by mali byť rozvíjané už v rámci pregraduálnej prípravy budúcich učiteľov. Na Pedagogickej fakulte PU v Prešove, v rámci riešenia projektu VEGA, bola realizovaná analýza výstupov prác študentov s cieľom monitorovania úrovne rozvoja komponentov matematickej kompetencie.

3. Analýza produktov práce študentov – seminárnych prác

3.1. Metodológia výskumu

Predmetom kvalitatívnej analýzy boli produkty prác študentov, budúcich učiteľov na primárnom stupni vzdelávania, konkrétne 1. ročníka magisterského stupňa štúdia. Išlo o produkty vo forme seminárnych prác obsahujúcich návrhy na implementáciu technológie rozšírenej reality (Augmented Reality – AR) do matematickej edukácie. Zámerom analýzy bola prvotná identifikácia indikátorov na zistenie miery rozvoja jednotlivých komponentov modelu matematickej kompetencie (matematické vedomosti, didaktické vedomosti, procedurálna doména a emocionálna doména).

Výskumný súbor tvorilo 113 študentov 1. ročníka magisterského stupňa štúdia v programe učiteľstvo pre primárne vzdelávanie na pedagogickej fakulte PU v Prešove (akademický rok 2024/2025 – zimný semester).

Analytická procedúra bola orientovaná na monitorovanie navrhovaných možností zaradenia AR do vyučovania vybraných tém aritmetiky a algebry na primárnom stupni vzdelávania z rôznych pohľadov: (1) účelnosť navrhovaného použitia AR – zmysluplnosť návrhu, kontext, podpora pri rozvoji predstavy o pojme, ako náhrada kalkulačky, lepšie uchopenie daného problému a pod., (2) typ modelu matematického pojmu na danej úrovni abstrakcie; model v AR v zmysle reprezentácie v konkrétnom móde, možnosti tvorby úloh na rôznej úrovni náročnosti pomocou nástrojov AR.

3.2. Popis zadania pre študentov a výberového súboru

Zadanie pre študentov bolo detailne pripravené a dostupné v elektronickej forme počas celého semestra. Pokyny boli štruktúrované do viacerých častí:

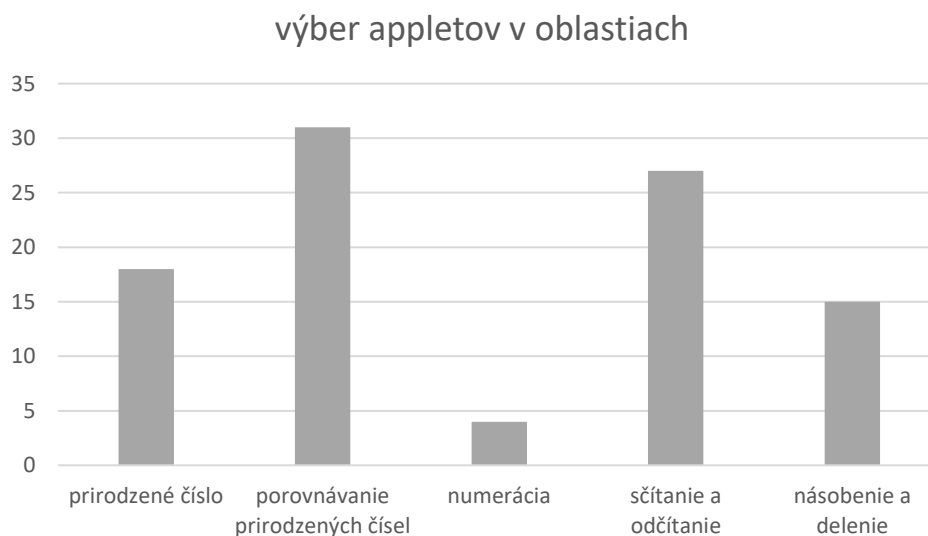
1. Príprava (inštalácia GeoGebra 3D Graphing Calculator).
2. Spustenie a práca s appletmi.
3. Prehľad AR appletov (prirodzené číslo, porovnávanie prirodzených čísel, numerácia, sčítanie a odčítanie prirodzených čísel, násobenie a delenie prirodzených čísel).
4. Odporúčaný postup.
5. Štruktúra seminárnej práce.

Súčasťou zadania boli podporné materiály vo forme inštruktážnych videí a sady appletov vytvorených v projekte KEGA. Do portfólia appletov aplikovaných v rámci prípravy edukačných aktivít (aj v rámci projektového zámeru), bolo vybraných celkovo 26 appletov z piatich tematických oblastí aritmetiky a algebry. Oblasť aritmetiky a algebry bola špecifikovaná z dôvodu obsahu predmetu, v ktorom bola popisovaná činnosť zaradená. Applety boli kategorizované do piatich oblastí na základe príslušnosti k matematickému obsahu (tabuľka 1).

Tabuľka 1. Počet appletov – aritmetika a algebra

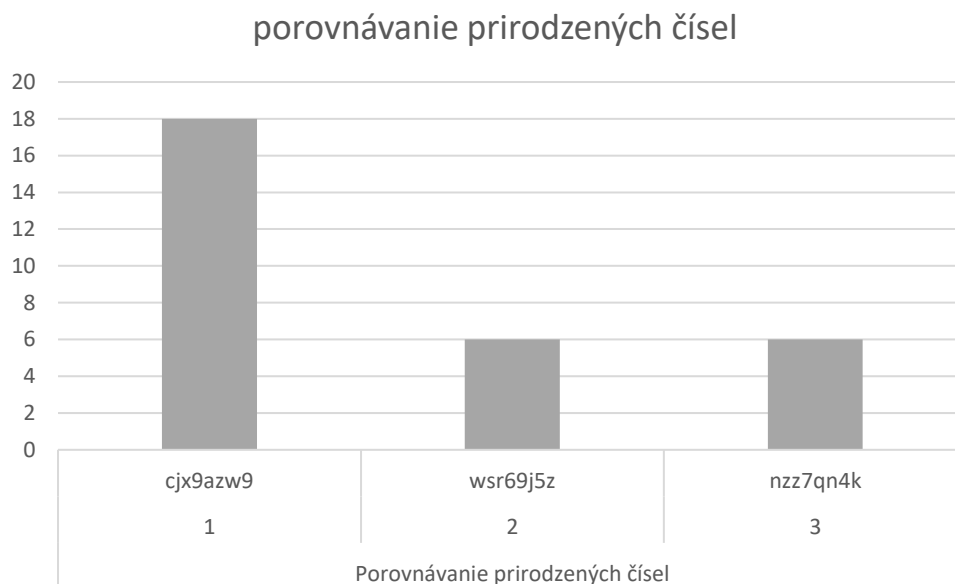
Oblasť matematiky	Počet appletov
prirodzené číslo	6
porovnávanie prirodzených čísel	3
numerácia	5
sčítanie a odčítanie	8
násobenie a delenie	4
SPOLU	26

V grafe 1 je prezentovaná miera výberu appletov z jednotlivých oblastí.



Graf 1. Výber appletov podľa oblastí

Najviac appletov (33%) bolo zvolených z oblasti porovnávanie prirodzených čísel, kde boli k dispozícii 3 applety. Početnosť ich výberu je prezentovaná v grafe 2. Druhou najčastejšie volenou oblasťou bolo sčítanie a odčítanie prirodzených čísel. Oblasť numerácia bola využitá len v štyroch prípadoch (s ponukou piatich appletov).



Graf 2. Početnosť výberu appletov z oblasti porovnávanie prirodzených čísel

V prvej etape výskumu bolo predmetom analýzy 18 seminárnych prác, v ktorých bol využitý identický applet (číslo 1 z oblasti porovnávanie prirodzených čísel, Hnatová et al., 2024, s. 66), z dôvodu zachovania objektivity pri tvorbe indikátorov a kategórií potrebných pri kvalitatívnej analýze produktov.

3.3. Výsledky kvalitatívnej analýzy

Väčšina námetov obsahovala motív príbehu so zámerom „záchrany krajiny“ riešením súboru úloh. Zadané úloh boli pripravené vo formáte pracovných listov, ktoré mali žiaci riešiť pomocou appletu. V mnohých prípadoch išlo o úlohy štandardného typu na porovnanie dvoch prirodzených čísel a vyjadrenie výsledku pomocou relačného znaku. Návrhy so zaradením appletu boli chápané len ako prostriedok na overenie správnosti riešenia úlohy, čo v danom type úloh nie je efektívne. Absentovalo zdôvodnenie zmysluplnosti práce s nástrojom, ktorý má prioritne predstavovať podporu učenia a učenia sa, nie prekážku oslabujúcu mieru úspešnosti riešenia úloh. Pozitívne možno hodnotiť fakt, že návrhy obsahovali aj prácu s appletom v móde AR, nielen v 3D, či využitie snímky obrazovky ako súčasť zadania úlohy.

Analýza produktov bola orientovaná na prvotnú identifikáciu indikátorov/sledovaných javov na zistenie miery rozvoja jednotlivých komponentov modelu matematickej kompetencie (matematické vedomosti, didaktické vedomosti, procedurálna doména a emocionálna doména). V ďalšej časti sú prezentované výstupy realizovanej kvalitatívnej analýzy pre jednotlivé domény, s uvedením pozitívnych a negatívnych zistení.

matematické vedomosti

Sledované javy: obsah matematiky, terminológia, úroveň porozumenia konceptu a významu appletu, zmysel prepojenia s danou témou v aktivite

+	zmysluplné zadania úloh primeraná tvorba modelu daného konceptu
–	nepresná odborná terminológia neprimeraný výber úloh pre danú cieľovú skupinu z pohľadu použitia matematických pojmov, či modelov pojmu (úroveň abstrakcie, náročnosti)

didaktické vedomosti

Sledované javy: formulácia cieľov, voľba a popis metód, foriem, organizácie činnosti, pokyny a zadania pre žiakov...

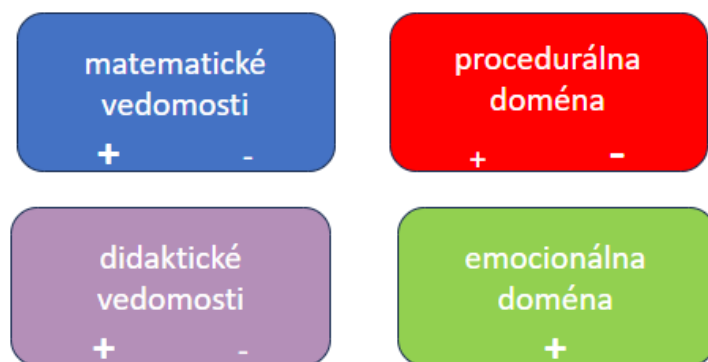
+	formulácia cieľov – zmysluplne, jednoznačne, východisko ŠVP, v kontexte so zameraním činnosti, úloh primeranosť cieľovej skupine metódy, formy – v zmysle aktivity realizovanej aj mimo vyučovania (hra, skupinová forma, pracovný list, stanovišťa) popis realizácie pomerne detailný, na seba nadväzujúce činnosti, úlohy
–	v niektorých prípadoch je navrhovaná práca s AR neprimeraná (smeruje ku kognitívne menej náročným typom modelov daného pojmu)

procedurálna doména

Sledované javy: zmysluplnosť použitia nástrojov s podporou AR, schopnosť prezentovať význam AR ako podporného prostriedku, stratégia práce s AR

+	prepojenie rôznych módov reprezentácie daného pojmu
–	návrhy na využitie AR sú implementované „nasilu“; v mnohých prípadoch by bola výučba efektívnejšia bez nich práca s appletmi pôsobí skôr ako prekážka a nie podporný materiál (spomaľuje proces riešenia úloh, problémov) neporozumenie podstate konkrétneho modelu pojmu v danom applete; nie je to uchopené, vysvetlené – len forma, obsah uniká (dokonca aj nesúlad medzi pojmi v úlohe a v applete) nekorektné, nezrozumiteľné a zložité inštrukcie nepremyslené (predimenzované) zaradenie viacerých prostriedkov (napr. kocky a manipulácia s nimi a aj applet)

emocionálna doména	
Sledované javy: motivácia, rozvoj pozitívneho vzťahu k matematike	
+	vytvorené návrhy vo forme príbehu, hry (stolová hra s plánom....) medzipredmetové vzťahy (príbehy, motívy z iných predmetov aj z reálneho života) pojem edukačná aktivita (čo bolo cieľom zadanej seminárnej práce) evokuje potrebu zasadiť do príbehu
–	málo aktivizujúce činnosti



Obrázok 5. Sumarizácia pozitívnych a negatívnych zistení v komponentoch matematickej kompetencie

Prezentované zistenia naznačujú klady aj nedostatky v jednotlivých komponentoch modelu matematickej kompetencie (obrázok 5). Limity v matematických vedomostiach sú dôsledkom nedostatočne zvládnutej problematiky z teoretického pohľadu. Študenti v mnohých prípadoch nepovažujú za dôležité používať detailnú a presnú terminológiu v snahe zjednodušiť a prispôsobiť úroveň komunikačného jazyka žiakom na primárnom stupni vzdelávania. V časti didaktických vedomostí výsledky odhaľujú pomerne vysokú mieru rozvoja daných schopností, čoho dôkazom sú rôzne návrhy metód a foriem práce a snaha o zaradenie originálnych prístupov. Výsledky analýzy ukázali na nedostatky predovšetkým v komponente procedurálna doména. Schopnosť vyberať a zaraďovať činnosti s podporou rôznych edukačných prostriedkov je u študentov na pomerne nízkej úrovni. Je nevyhnutné stimulovať rozvoj týchto zručností už počas ich pregraduálnej prípravy zaradením konkrétnych aktivít s podporou didaktických prostriedkov rôzneho druhu (manipulatívne pomôcky, obrázkový materiál, elektronické materiály, modely matematických pojmov vytvorených s podporou technológie AR a pod.). V tomto kontexte sa práca s nástrojmi AR ukazuje ako zmysluplná z viacerých pohľadov – podpora matematickej kompetencie, rozvoj porozumenia matematickým pojmom, identifikácia analógií medzi reprezentáciami pojmov, priestor na didaktickú transformáciu a interpretáciu daného učiva v súlade s formálnym jazykom matematiky. V emocionálnej doméne boli prevažne identifikované pozitíva, čo sa prejavilo v návrhoch integrujúcich elementy z rôznych predmetov a zaradením činností motivačného charakteru.

4. Záver

Matematickú kompetenciu a jej komponenty je dôležité rozvíjať aj v rámci pregraduálnej prípravy učiteľov primárneho stupňa vzdelávania. Prezentovaný výskum mal za cieľ identifikovať indikátory pre zistenie miery rozvoja komponentov matematickej kompetencie. Predmetom analýzy boli produkty práce študentov, spracované vo forme seminárnych prác.

Do realizácie projektovej aktivity sa zapojilo takmer 100 percent študentov výberového súboru, čo možno považovať za pozitívum, najmä z toho dôvodu, že účasť bola dobrovoľná, bez akýchkoľvek pridaných benefitov pre celkové hodnotenie v rámci predmetu. Študenti prejavili pomerne vysokú mieru aktivity a motivácie, ako aj záujem o implementáciu nových technológií a edukačných prístupov do edukácie. Výsledky analýzy reflektujú výskyt pozitívnych aj negatívnych prejavov sledovaných javov vo všetkých predmetných oblastiach, čím sa potvrdzuje potreba realizácie ďalšieho skúmania možností rozvoja matematickej kompetencie. Jedným z prístupov je aj inkorporácia technológie AR do matematickej prípravy študentov. Integrácia AR do matematickej edukácie nie je jednorazovou záležitosťou a vyžaduje zvyšovanie odbornosti učiteľov vzdelávaním minimálne v oblasti práce s digitálnymi technológiami (Hnatová, 2023). Podporu prípravy budúcich pedagógov v oblasti práce s technológiou AR deklaruje aj Lipták (2023).

Prvotné výsledky analýzy prác, produktov študentov, viedli k formulácii otázok:

- (1) Prečo by učitelia mali zaradiť do vyučovania matematiky prácu s AR? V čom je efektívnejšia v porovnaní s inými pomôckami z pohľadu možnosti pre modelovanie konceptu v rôznych módoch reprezentácie?
- (2) Ako presvedčiť učiteľov aj študentov, že má zmysel vo vyučovaní matematiky pracovať aj s nástrojmi s podporou AR? Tieto otázky budú predmetom ďalšej etapy výskumu realizovaného v rámci projektov na PF PU v Prešove.

Acknowledgements

Príspevok vznikol s podporou projektov:

VEGA 1/0468/25 Procesy myslenia v matematike: špecifikácia indikátorov rozvoja matematických kompetencií učiteľov v primárnom vzdelávaní

KEGA 024PU-4/2024 Technológia rozšírenej reality a jej inkorporácia do matematickej prípravy študentov v študijnom programe Predškolská a elementárna pedagogika.

Literatúra

Boras, M. (2022). Augmented Reality in the Classroom. In: *INTED2022 Proceedings*, 1411–1416. <https://doi.org/10.21125/inted.2022.0421>

Hnatová, J. (2023). *Technológia rozšírenej reality v matematickej edukácii: SWOT analýza*. Prešov: Vydavateľstvo Prešovskej univerzity.

Hnatová, J., Prídavková, A., & Lipták, J. (2024). *Rozšírená realita v primárnej matematickej edukácii: analýza edukačných aktivít študentov – budúcich pedagógov*. Prešov: Vydavateľstvo Prešovskej univerzity.

Kilpatrick, J. (2009), Volume, pp. 107–121. *The Mathematics Teacher and Curriculum Change*. Philippine News Agency: Manila, Philippine.

- Koparan, T., Dinar, H., Koparan, E. T., & Haldan, Z. S. (2023). Integrating augmented reality into mathematics teaching and learning and examining its effectiveness. *Thinking Skills and Creativity*, 47, 101245. <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2023.101245>
- Lipták, J. (2023). Rozšírená realita vo voľnočasovej matematickej edukácii očami študentov predprimárnej a primárnej pedagogiky. *Elementary Mathematics Education Journal*. 5(2), 17–24.
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 9–28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- Piñero Charlo, J. C., Noriega Bustelo, R., Canto López, M. del C., & Costado Dios, M. T. (2022). Influence of the Algorithmization Process on the Mathematical Competence: A Case Study of Trainee Teachers Assessing ABN- and CBC-Instructed Schoolchildren by Gamification. *Mathematics*, 10(16), Article 16. <https://doi.org/10.3390/math10163021>
- Recommendation of the European Parliament and of the Council of 18 December 2006 on Key Competences for Lifelong Learning. Off. J. 2006, 394, 10–18. Available online: <http://data.europa.eu/eli/reco/2006/962/oj> (accessed on 6th March 2025).

ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN MATHEMATICS EDUCATION: A SYSTEMATIC REVIEW OF OPPORTUNITIES, CHALLENGES AND PEDAGOGICAL IMPLICATIONS

Salvador Magno XIMENES

Instituto Católico para a Formação de Professores (ICFP) Baucau (Timor-Leste)

salvadormx2018@gmail.com

Abstract

This systematic literature review examines the opportunities, difficulties, and educational implications of adopting artificial intelligence (AI) in mathematics education at the tertiary level in Timor-Leste. The review incorporates international evidence collected from 31 peer-reviewed studies published between 2016 and 2025 and presents it, given the realities of a higher education system in a developing country. These results demonstrate that AI, especially large language models like ChatGPT, has significant potential in terms of personalised instruction, customised feedback, and additional tutoring, which would solve the issue of teacher shortages and increase student interest. Despite these, there are still several obstacles, which include threats to academic integrity, algorithm biases, misalignment between cultures/languages, and a lack of infrastructure, particularly in rural areas. AI can be a game changer in mathematics education in Timor-Leste, which should be implemented strategically, in a context-sensitive way, and through strong policies, infrastructure investment, and long-term teacher education leadership.

Keywords: Artificial intelligence, Mathematics education, Higher education, ChatGPT, Timor-Leste.

1. Introduction

Most fields have embraced Artificial Intelligence (AI) as a revolutionary technology, and the educational sector is not resistant to these radical changes. In tertiary education, AI is seen increasingly as a driver of pedagogical innovation, and it can be especially effective in fields with large datasets, such as mathematics, where data insights and adaptive learning tools can enable highly individualised learning experiences. As a supposed gatekeeper subject within science, technology, engineering, and mathematics (STEM) education, mathematics can be particularly improved by AI-based tools that can check learning disabilities, create live feedback, and adapted lesson plans accordingly. AI-enabled educational technologies, including intelligent tutoring systems, automated online learning and math assessments, and predictive analytics, are transformational globally in how mathematics is taught and learnt (Zawacki-Richter et al., 2019). Nevertheless, the possible level of translation of such innovations into the reality of developing countries is an open and, in spite of that, important request.

Introducing AI into various fields, including mathematics education in Timor-Leste, presents complexities but also offers an attractive opportunity. There are significant constraints on the educational structure of the country, which is recovering and reconstructing after years of political instability. The limitations include the absence of digital infrastructure, limited internet connectivity, a shortage of AI-literate teachers, and a significant urban-rural gap in the availability of educational resources. Research findings on the integration of technologies in

sub-Saharan Africa and other developing regions would also imply that the lack of knowledgeable teachers or technical support and general underfunding of the system could play a key role in preventing the successful implementation of technologies in education (Molla et al, 2023). While the idea of digital transformation is gaining momentum, implementing AI-enhanced learning systems in that context remains quite complex. The implementation of AI can be fragile and unnecessary if there are active investments in teacher education and curriculum development, as well as the development of technological capabilities. Furthermore, the danger exists of expanding educational inequalities that are currently present because of the implementation of some sophisticated technologies without the support structures that are necessary to address their educational inequities.

Nevertheless, Timor-Leste also has a special opportunity to consider the integration of AI on a bottom-up scale. The flexibility in designing contextually appropriate and future-bound pedagogical strategies exists since its operative system of tertiary education is still in a growing phase. AI could be designed to fit the linguistic, cultural, and pedagogical details of the nation, for instance, could include a Tetum-language interface and culturally responsive mathematics content. Particularly, AI may address some of the institutional educators have to face barriers, such as overcapacity in the classroom, the unavailability of the latest textbooks, and the shortage of academic mathematics experts. As an example, AI-based tools can be used as virtual tutors and guide students through interactive learning solutions to problems even when a mathematics teacher is not qualified enough to take over the responsibilities (Luckin et al., 2016). Through this path, AI does not simply represent a tech supplement but could represent a primary element to a more comprehensive and efficient education system.

The systematic review suggested in the current study corresponds with the pattern through three overall questions, as follows:(1) What are the opportunities and challenges related to the integration of AI in the development of mathematics lessons at the tertiary level of education in Timor-Leste? What is the best way to align AI technologies with the pedagogical requirements for mathematics education across the country? What are the consequences of incorporating AI for improving the teaching strategies within Timor-Leste's higher education system? We aim to dissect the potential and challenges of integrating AI into a developing country's education system. This research aims to solidify a significant literature gap regarding AI and the teaching of mathematics in low-resource environments by undertaking a wide exploration of international best practices and a critical review of how these practices are relevant to Timor-Leste.

This study aims to increase the literature on the subject of AI in education because it focuses on the experiences of a less-discussed but more relevant section. In focusing the research on mathematics education as a major driving force of intellectual and economic growth. It highlights the concern that must be turned towards providing settings, knowledge, and techniques for 21st-century learning in the tertiary learning institutions of Timor-Leste. The results were likely to supply practical information to educators, policymakers, and technologists, thus concreting the way to future-proof, more inclusive, and more flexible mathematics teaching in Timor-Leste.

2. Literature Review

The use of Artificial Intelligence (AI) in the learning environment has been a topic that has garnered increased academic interest, especially in light of universities pursuing new methods of enhancing effectiveness and the quality of teaching and educating people. Mathematics education is one subject with abstract cognition that requires great intellectual insight. Therefore, AI has a promise of transforming all these pedagogical practices with adaptive teaching, automation, and individual feedback. The review of literature critically reflects the

discussions being discussed by academics regarding the potential use of AI, particularly the generative models such as ChatGPT, in teaching mathematics at the tertiary level. It discusses the possible and conceivable powers of AI along with its traditional restrictions and draws attention to its acceptance in the context of higher education in Timor-Leste.

2.1. Opportunities Offered by AI in Mathematical Education

The application of AI-related technologies has significantly transformed the instruction and teaching of mathematics (Meylani, 2024; Borah and Borah, 2024). Large language models (LLMs), such as ChatGPT, have the potential to optimise real-time communication, afford scaffolding of abstract concepts, and differentiate content in line with the needs of a particular learner (Cotton et al., 2023; Farrokhnia et al., 2023). Such affordances are especially useful in under-resourced or developing contexts, such as in Timor-Leste, where fewer qualified teachers and learning resources are available.

According to Wardat et al. (2023), ChatGPT can become a revolutionary tool in mathematics education, as it allows teaching students step-by-step explanations and helps them resolve such complicated problems. Likewise, Sánchez-Ruiz et al. (2023) demonstrate that ChatGPT has a positive impact on engineering mathematics courses, promoting student self-control and problem-solving strategies. Xiao and Zhi (2023) examined language education and found that learners considered ChatGPT a beneficial resource for completing tasks and reinforcing knowledge, according to a survey. This result suggests that studying mathematics would yield similar benefits since ChatGPT can respond.

Opportunities for personalisation in education also exist in the case of AI. Yu et al. (2017) also believe that AI-infused platforms are better suited to adapt to the learners' rate of progress and needs, thereby enhancing engagement and success. It adapts to the studies of Jeon and Lee (2023), who support the view of a complementary approach to interactions between AI tools and a human educator, with the main focus being on the ability of AI to add to what an instructor does, not substitute him or her. Further, it is essential to learn more about attitudes to AI usage. Kuleto et al. (2021) clarify that the willingness of students to use AI correlates with its effective use. Chan and Lee (2023) attached importance to the fact that there should be adjustments according to their generations in AI acceptance as an element of designing AI-enhanced curricula.

2.2. Challenges and Ethical Considerations

Despite the advantages, it is clear that incorporating AI into mathematics education raises several concerns, such as academic integrity is one of the pivotal problems (Seaton, 2020; Barrientos et al., 2024). AI-based tools such as ChatGPT put plagiarism and overdependency at risk, which may negatively affect students' self-thinking abilities and independent problem-solving skills (Michel-Villarreal et al., 2023; Cotton et al., 2023). The ethical implications go beyond malpractice to cover fairness, responsibility, and transparency in algorithms' decision-making.

Hwang and Tu (2021) observed that in spite of the offered support of routine activities, AI is problematic in dealing with higher-level mathematical thinking, and the implementation of this technology in pedagogy should be closely monitored. Lamerias and Arnab (2021) confirmed the importance of critical ways of how to engage with AI technologies by educators, as following their uncritical adoption could increase existing inequities or pedagogical gaps. Moreover, Raji et al. (2021) note that the pedagogy of exclusion is a concern in the instruction of AI ethics because it contributes to the socialisation of social biases in education without an inclusive and critical design. These issues are close to the situation in Timor-Leste, where the level of digital literacy is different in various population groups, and the education policies concerning AI are not properly developed.

2.3. Frameworks for Effective Integration

In order to accommodate these issues, researchers promote structured, policy-based frameworks to inform how AI is put to use in university teaching (Jin et al, 2025). Chan (2023) presented a detailed AI policy education framework with pedagogic, operational, and governance aspects. The model requires such institutional policies that promote ethical integration, infrastructural development, and decision-making by means of including the stakeholders (Cacho, 2024).

Eager and Brunton (2023) also suggested that ethical literacy be integrated into curricula with the combination of AI so that students can negotiate both technical and social consequences of the technology. They agreed with previous studies conducted by Chen et al. (2022), where chatbot-based help with classroom interactions and student success was designed to demonstrate the necessity of effective AI integration as purpose-driven and learner-centred. This systematic order will be particularly pertinent in mathematical learning. According to Wardat et al. (2023) and Jeon and Lee (2023), it is possible to use AI successfully, and it will occur when human teaching and machine-generated assistance are aligned, so AI may complement, not substitute, the pedagogical objectives of the curriculum.

2.4. Knowledge Gaps and Future Research Directions

Even though there is continuously growing research on AI in education, there are still important knowledge gaps, particularly with regard to low-income countries such as Timor-Leste (Saldanha et al., 2024). Current research strengths predominantly focus on data from high-income countries, with little research on the long-term impact of adopting AI in resource-limited contexts. Longitudinal studies are urgently needed to evaluate the effect of AI on student learning outcomes, teacher performance, and overall institutional improvement in teaching mathematics. Instantly need longitudinal studies to evaluate the impact of AI on student learning outcomes, teacher performance, and overall institutional improvement in mathematics teaching.

Furthermore, there is a lack of knowledge regarding how people can modify AI to support inclusive education. Michel-Villarreal et al. (2023) and Chan (2023) underscore the need for AI tools that are culturally responsive and adaptable to various linguistic and social contexts. One possible path for future work would be to study how models such as ChatGPT can be localised, such as by adding Tetum or Portuguese language interfaces.

The incorporation of AI in the nature of mathematics learning is transformational, especially in settings like Timor-Leste, with structural and economic constraints in place with regard to educational systems. Although AI tools, such as ChatGPT, can promise more interaction, personalisation, and learner agency, they come with ethical, pedagogical, and institutional issues (Can et al., 2023; Asy'ari & Sharov, 2024). It will be necessary to respond with strong policy frameworks and professional development, as well as research-inclusive approaches. With the world already showing increasing interest in the possibilities of AI-enhanced learning. It is imperative that new systems, like that of Timor-Leste, be designed to take advantage of the potential of AI but offer protection to ensure the maintenance of educational integrity and equity.

3. Research Methods

3.1. Search Strategy and Source Selection

This study, a systematic literature review (SLR) approach was used to critically examine the implementation of artificial intelligence (AI) in mathematics, with a particular focus on its contextual applicability within the domain of the tertiary education domain in Timor-Leste.

A systematic review was chosen because it allows for a rigorous, transparent, and replicable synthesis of existing scholarly work (Snyder, 2019; Zawacki-Richter et al., 2019).

Academic databases, such as Scopus, Web of Science, ERIC, Google Scholar, and DOAJ, were used when conducting the literature search. Controlled vocabulary terms were used in combination with the Boolean operators to achieve maximum coverage. The main search terms were “Artificial Intelligence”, “mathematics education”, “AI in education”, “higher education”, “developing countries”, “ChatGPT” or “large language models”, “mathematics instruction”, and “AI in education” and “Timor-Leste”.

Only sources published between 2015 and 2023 were considered, as they had to be relevant to current AI capabilities and educational policies. Besides journal articles, grey literature (institutional reports) was used as well when regionally specific (e.g., regarding information on the educational infrastructure or teacher readiness in developing countries).

3.2. The Inclusion and Exclusion Criteria

The inclusion or exclusion criteria are well drawn to ensure the review's relevance and completeness (Arya et al, 2021; Prill, 2021). Studies were considered eligible when they were targeted at the use of artificial intelligence (AI) in mathematics or STEM learning in any higher education setting. In addition, considered pedagogical, ethical, or institutional aspects of AI integration and was published in professional, peer-reviewed, or other reputable professional sources in English in or after 2015. Other studies that seemed to fit the study criteria also provided either theoretical or empirical arguments for the research purpose. On the other hand, studies were excluded when they focused simply on primary or secondary learning, had no straightforward significance to higher learning or math learning, or lacked clear methodological reporting in spite of being peer-reviewed. This thorough review method resulted in an intellectual but contextually relevant database of literature that reflects the higher education landscape in Timor-Leste.

3.3. Study Selection Process

The methodology following the selection of studies was based on the PRISMA (Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses) framework (Moher et al., 2009; Arya et al, 2021). In the first search, 112 articles were found. Following duplicate removal and title/abstract screening, 68 studies were left over. These were put under full-text examination, where the 13 articles were further excluded because they did not follow the set entry criteria. The ultimate sample contained 31 studies whose in-depth analysis was carried out. The snowballing technique was also used to ascertain other pertinent studies via the bibliography of primary articles. Disagreements in the selection of studies were later on solved collaboratively among reviewers, as it is best practice in the methodology of SLRs (Thomas & Harden, 2008).

3.4. Quality Assessment

To identify studies of high methodological quality, the process of quality appraisal was conducted, and all of the selected studies were assessed using a slightly modified version of the Critical Appraisal Skills Programme (CASP) checklist (CASP, 2018). This instrument compared every study on several main points, such as the specificity of purposes; methodology appropriateness; relative context for education in the developing world; and the data reporting and analysis process should be straightforward.

The studies received ratings of high, moderate, and low quality. High-quality and moderate-quality studies were the only ones that remained in the final synthesis. The judgement not only emphasised that the results are based on reasonable and sound evidence, but it also acknowledged work that could have provided regional knowledge, such as the study by Molla,

Yayeh, and Bisaw (2023) on faculty competence in Ethiopia, which contributed contextual relevance to the literature despite its methodological limitations.

3.5. Data Extraction and Synthesis

The author established a structured data extraction form to ensure the systematic collection of pertinent information from each study. This form contained the bibliographic data—author names, publication year, and source—as well as contextual data, like the geographical location and relevant educational level. It also captured the specification and planned usage of AI tools like ChatGPT and adaptive learning systems and their aimed outcomes, including improved learning of the students and assistance in the work of teachers, as well as considerations of ethics. Additionally, the form listed barriers to the process of AI integration and distinguished solutions to address the barriers in integration. The obtained information was then broken into pieces and analysed by way of thematic analysis (Thomas & Harden, 2008) or recurrent coding, with the aim of producing the final themes and subthemes following the research questions. Four major topics have been identified: (1) personalisation and adaptive feedback as significant pedagogical possibilities (Yu et al., 2017; Wardat et al., 2023); (2) academic dishonesty, including such concepts as academic dishonesty, academic misconduct, and algorithmic bias (Michel-Villarreal et al., 2023; Cotton et al., 2023); and (3) institutional and infrastructural challenges, with poor funding and cyberilliteracy as examples (Tadesse & Gill, 2015).

4. Results and Discussion

4.1. Results

In this systematic literature review, evidence from 31 peer-reviewed studies was synthesised to answer the three guiding research questions mentioned in the introduction.

Opportunities and Challenges of AI Integration

The review provided evidence that there was room to develop mathematics education in Timor-Leste using AI. The research also showed consistent findings, supported by the ability of AI systems, especially large language models like ChatGPT, to individualise instruction by developing content according to the speed and needs of a particular student, explaining things step-by-step, and immediately providing feedback to facilitate conceptual learning (Yu et al., 2017; Wardat et al., 2023). The tools have the potential to fill in the teacher capacity gaps since they operate as supplementary tutors in situations with a shortage of qualified mathematics educators or discouragingly large class sizes. Moreover, previous studies conducted in other developing settings imply that AI can lead to increased engagement among students, increased learner autonomy, and thus the maintenance of persistence in mathematics learning (Sánchez-Ruiz et al., 2023; Xiao and Zhi, 2023).

However, the review also identified several significant issues that require attention to ensure the successful adoption of AI. The idea of academic dishonesty was prominent, with different research highlighting that depending too much on AI-solved tasks could negatively affect students' independent reasoning and problem-solving achievements and make students more prone to plagiarism (Michel-Villarreal et al., 2023; Cotton et al., 2023). Other problems, like algorithmic bias and cultural mismatch, were also mentioned, since systems developed in English-speaking settings by and large do not represent the same linguistic and cultural experience in Timor-Leste. Additionally, infrastructural constraints such as the unavailability of internet connectivity, technological device accessibility, and the lack of AI literacy among teachers are a significant barrier to the implementation, especially among the rural and underserved regions (Tadesse & Gillies, 2015; Molla et al., 2023).

Positioning AI in Pedagogical Needs

The results of the review highlighted the opinion that the effective introduction of AI in the teaching of mathematics is preconditioned by its consistency with the available pedagogical systems, school curricula, and cultural realities. In their work, scholars always tried to build a case that AI should not substitute the work of a teacher but only support it, allowing the latter to improve his or her practices without losing the relational and contextual aspect of teaching (Jeon & Lee, 2023). Culturally responsive and linguistically inclusive design was a critical need in the case of Timor-Leste, where the AI platform concerned needed to interface with the Tetum and Portuguese languages, and the interface was designed with the inclusion of locally relevant examples to make the platform accessible and relevant to all students nationwide.

The literature also referred to the value of integrating AI into instruction planning and the measuring techniques to facilitate more efficient instruction planning, formative assessment, and differentiated instruction (Chan, 2023; Eager & Brunton, 2023). The second theme that was replicated several times was ethical literacy in the use of AI, where the studies highlighted that focused education should be provided to not only educators but students as well. Alignment strategies of this nature are needed to ensure the pedagogical potential of AI is maximised as much as possible but does not violate academic integrity or inclusivity.

Teaching Strategies in Higher Education

The facts indicate that marrying AI with mathematics education (third-level) in Timor-Leste may revolutionise teaching methods in a few ways. AI tools can enhance the efficiency of the instructional process by automating tasks performed by instructors, such as grading and providing feedback. This automation allows instructors to free up their time and focus more on superior learning processes, including encouraging critical thinking, facilitating collaborative problem-solving, and training individual learners. Adaptive learning systems can improve learning outcomes by providing targeted interventions and timely assistance to overcome specific conceptual challenges faced by students.

Furthermore, using AI can promote pedagogical innovation, especially the use of blended and flipped learning paradigms, where students will access AI-supported pre-class content, and classroom time will still be interactive and application-driven. Nevertheless, there is a risk of increasing disparities between urban and rural learners due to unequal access to AI technologies and educational opportunities. The results also point to the fact that long-term professional growth will be crucial to making sure that teachers have the capability and confidence to successfully incorporate AI, keep up with the developments in technology, and sustain the quality and inclusivity of higher education mathematics education.

4.2. Discussion

The results of this systematic review provide a more intricate meaning to the prospects, alignment, and implications of Artificial Intelligence (AI) incorporation in the study of mathematics at the higher education level in Timor-Leste. The results demonstrate this potential transformative power, which, nevertheless, points to the need to plan, adapt to context, and ethically control comprehensively.

Opportunities and Challenges Contextually

Personalised learning, adaptive feedback, and the support of underqualified or overburdened teachers are identified as possibilities that are very appropriate in Timor-Leste, where the insufficient number of teachers and crowds that have to be taught commonly constrain individualised instruction. The potential of AI to engage as a virtual tutor correlates

with the priorities in the educational field in the country, providing an avenue through which the issues associated with the system can be touched upon without limiting it to the physical resources. The same result obtained in other developing settings (Wardat et al., 2023; Yu et al., 2017) repeats the usefulness of AI as a pedagogical tool rather than an added technological tool.

Nonetheless, concerns regarding academic integrity, algorithmic bias, and infrastructural constraints are particularly significant in Timor-Leste. Given the lack of AI literacy among faculty and the wide gaps between urban and rural connectivity, there are risks that early adoption may increase, rather than decrease, inequity. The lack of localised AI tools in Tetum or Portuguese could potentially diminish accessibility and cultural proximity, thereby intensifying this threat.

Bringing AI into Consultation with Pedagogical Needs

The findings underscore the need for goal-oriented AI integration, with the entire process grounded in pedagogical principles. The human-AI collaboration is preferable to AI replacement in the sense that, in this case, technology is used to complement the experiences of an educator and does not replace the interpersonal and situational component of teaching (Jeon & Lee, 2023). Such an approach concurs with the constructivism methods in mathematics learning, where educators use guidance with inquiry and problem-solving to help learners.

A culturally responsive design of AI is especially important in Timor-Leste. This would not only increase comprehensibility but also inclusion, given that it would adapt the interfaces and instructional content to local languages and contexts. Without this type of adaptation, there is a risk of reinforcing linguistic stratifications that oppress students who are either outside the country or have a different first language. Both teachers and students need to be exposed to ethical literacy, which should become part of teacher professional development and student learning based on the recommendations made in the reviewed frameworks (Chan, 2023; Eager & Brunton, 2023). It is particularly topical because the worldwide community is worried about the possibility of AI promoting bias and revenue against academic integrity.

Implications of Teaching Strategies in Higher Education

The use of AI in mathematics teaching in Timor-Leste would trigger a transition to a more interactive and student-centered method. Through the automation of routine feedback and the creation of personalised learning pathways, AI enables teachers to dedicate more time to instructional tasks at a higher level, stimulates critical thinking, assists in problem-solving, and supervises project-based applications. However, it still needs to be noted that the possibility of achieving better learning outcomes relies on fair access to AI consumables as well as long-term teacher capacity building. Unless national governments make smart infrastructure investments, there is a significant risk of creating a two-tiered system where students in geographically privileged urban areas excessively utilise AI advancements while rural students fall further behind.

The literature also implies that the adoption of AI can promote blended and flipped learning models that concentrate on supporting independent learning with the help of AI and active classroom learning involvement. Although this can be a real asset in teaching mathematics, it must be adopted cautiously, given the technological capability and cultural needs of higher education institutions in Timor-Leste.

Management implications for Timor-Leste

Combined, the results and analysis lead to the conclusion that it is best to be cautious yet proactive about integrating AI into the education of mathematics in Timor-Leste. Since higher education is still developing in the country, it is in a unique position until now to implement AI

in a manner that is locally relevant, culturally responsive, and pedagogically sound. However, a cohesive plan that integrates efforts in policy creation, infrastructure investment, professional education, and the development of AI tools suitable for regional contexts will be the key factor.

5. Conclusion and Recommendation

5.1. Conclusion

The systematic literature review focused on the prospects, barriers, programmatic efforts, and the possible repercussions of embracing Artificial Intelligence (AI) in the teaching and learning of mathematics within tertiary education in Timor-Leste. A synthesis of 42 peer-reviewed articles demonstrated that AI promises significant changes to teaching and learning via the use of personalised instruction, adaptive feedback, and assistance for under-resourced or overstressed educational professionals. When applied correctly, AI technologies can help address long-standing issues in mathematics learning, such as large class sizes, teacher workforce shortages, and the lack of modern and tailored instructional methods, with learner interaction and independence being potential outcomes.

However, the findings also identified potential risks and limitations that require attention to fully realise the potential of AI in this area. The key obstacles to fair implementation include issues of academic integrity, bias in algorithms, and the lack of culturally specific AI that incorporates distinct linguistic features. These pressures are further aggravated by infrastructural constraints, especially poor internet connectivity, a lack of device accessibility, and low levels of literacy among educators, especially in rural and underserved regions.

As pointed out in the review, it is important that the implementation of AI is done through a pedagogical goal with the perspective of enhancing the use of educators rather than replacing them. The alignment with the local curricula, local cultures and language realities should be effective enough to make it accessible, inclusive and relevant. Furthermore, it is essential to integrate ethical literacy into the training of teachers and the learning of students to reduce the risks related to bias, transparency, and responsible use of AI.

Incorporating AI into Timor-Leste's tertiary mathematics education presents both opportunities and challenges. To fulfil its pioneering promise, policymakers, teachers, and institutional heads need to take a strategic, contextual view, which integrates infrastructural investment, teacher improvement, moral administration, and culture-sensitive design. It is only by making such measures synchronous that AI will become a driving force for more inclusive, effective, and future-focused mathematics education in Timor-Leste.

5.2. Recommendations

Policymakers ought to create a national AI-in-education policy that looks into the issues of infrastructure, governance, and ethical implications. This tactic should contain the specifications of the integration of AI into the tertiary mathematics course in such a way that it will complement the role of an educator, not merely substitute it.

The financing of digital infrastructure and the provision of dependable and equal access to digital devices capable of AI applications are fundamental to ensuring that the gap between rural and urban learners does not increase in the challenge of COVID-19. Culturally and linguistically responsive artificial intelligence tools should be developed to ensure inclusivity and relevance for local communities. The Tetum and Portuguese languages should be integrated into the AI applications, and the examples used should also be relevant to the locals to make them more inclusive, culturally friendly, and engaging.

The ethical utilisation of AI must be integrated into teacher training programmes and student lessons where the use and emphasis are on transparency, bias reduction and the ethical use of AI-generated outputs.

More holistic capacity-building programs are also required to prepare teachers with the technical expertise, methodologies, and confidence to use AI tools in mathematics instruction.

AI can facilitate blended and flipped learning, enabling active, student-centred learning with solid pedagogical foundations.

There needs to be longitudinal assessments to track the progress of the benefits of AI integration in impending results and teacher behaviours, as well as the institutions' achievements, which should be a consistent positive activity and sustainable strategy adopted.

References

- Asy'ari, M., & Sharov, S. (2024). Transforming education with ChatGPT: Advancing personalized learning, accessibility, and ethical AI integration. *International Journal of Essential Competencies in Education*, 3(2), 119–157. <https://doi.org/10.36312/ijece.v3i2.2424>
- Arya, S., Kaji, A. H., & Boormeester, M. A. (2021). PRISMA reporting guidelines for meta-analyses and systematic reviews. *JAMA Surgery*, 156(8), 789–790. <https://doi.org/10.1001/jamasurg.2021.0546>
- Barrientos, A. A., Del Mundo, M. A., Inoferio, H. V., Adjid, M. A., Hajan, H. B., Ullong, M. M., ... & Espartero, M. M. (2024). Discourse Analysis on Academic Integrity Generative AI: Perspectives from Science and Mathematics Students in Higher Education. *Environ. Soc. Psychol*, 9, 1–13. <https://doi.org/10.59429/esp.v9i9.2927>
- Borah, P., & Borah, A. C. (2024). A review of use of Artificial Intelligence in teaching and learning of Mathematics. *IJSAT-International Journal on Science and Technology*, 15(4). <https://doi.org/10.71097/IJSAT.v15.i4.1190>
- CASP. (2018). *Critical Appraisal Skills Programme (CASP) checklists*. <https://casp-uk.net/casp-tools-checklists/>
- Chan, C. (2023). A comprehensive AI policy education framework for university teaching and learning. *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, 20(1), 38. <https://doi.org/10.1186/s41239-023-00408-3>
- Chan, C., & Lee, K. K. W. (2023). The AI generation gap: Are Gen Z students more interested in adopting generative AI such as ChatGPT in teaching and learning than their Gen X and millennial generation teachers? *Smart Learning Environments*, 10(1), 1–23. <https://doi.org/10.1186/s40561-023-00269-3>
- Cacho, R. M. (2024). Integrating Generative AI in University Teaching and Learning: A Model for Balanced Guidelines. *Online Learning*, 28(3), 55–81. <https://doi.org/10.24059/olj.v28i3.4508>
- Can, Z. B., Duman, H., Buluş, B., & Erişen, Y. (2023). How did ChatGPT transform us in terms of transformative learning?. *Journal of Social and Educational Research*, 2(2). <https://doi.org/10.5281/zenodo.10441159>
- Chen, Y., Jensen, S., Albert, L., Gupta, S., & Lee, T. (2022). Artificial Intelligence (AI) student assistants in the classroom: Designing chatbots to support student success. *Information Systems Frontiers*, 25, 161–182. <https://doi.org/10.1007/s10796-022-10291-4>

- Cotton, D. R. E., Cotton, P. A., & Shipway, J. R. (2023). Chatting and cheating: Ensuring academic integrity in the era of ChatGPT. *Innovations in Education and Teaching International*, 61(2), 228–239. <https://doi.org/10.1080/14703297.2023.2190148>
- Eager, B., & Brunton, R. (2023). Prompting higher education towards AI-augmented teaching and learning practice. *Journal of University Teaching and Learning Practice*, 20(5), Article 2. <https://doi.org/10.53761/1.20.5.02>
- Farrokhnia, M. R., Banihashem, S. K., Noroozi, O., & Wals, A. (2023). A SWOT analysis of ChatGPT: Implications for educational practice and research. *Innovations in Education and Teaching International*, 61(4), 460–474. <https://doi.org/10.1080/14703297.2023.2195846>
- Hwang, G.-J., & Tu, Y. (2021). Roles and research trends of artificial intelligence in mathematics education: A bibliometric mapping analysis and systematic review. *Mathematics*, 9(6), Article 584. <https://doi.org/10.3390/math9060584>
- Jeon, J.-B., & Lee, S. (2023). Large language models in education: A focus on the complementary relationship between human teachers and ChatGPT. *Education and Information Technologies*, 28, 15873–15892. <https://doi.org/10.1007/s10639-023-11834-1>
- Jin, Y., Yan, L., Echeverria, V., Gašević, D., & Martinez-Maldonado, R. (2025). Generative AI in higher education: A global perspective of institutional adoption policies and guidelines. *Computers and Education: Artificial Intelligence*, 8, 100348. <https://doi.org/10.1016/j.caeai.2024.100348>
- Kuleto, V., Ilić, M. P., Dumangiu, M.-A., Ranković, M., Martins, O. M. D., Păun, D., & Mihoreanu, L. (2021). Exploring opportunities and challenges of artificial intelligence and machine learning in higher education institutions. *Sustainability*, 13(18), Article 10424. <https://doi.org/10.3390/su131810424>
- Lameras, P., & Arnab, S. (2021). Power to the teachers: An exploratory review on artificial intelligence in education. *Information*, 13(1). <https://doi.org/10.3390/info13010014>
- Luckin, R., Holmes, W., Griffiths, M., & Forcier, L. B. (2016). *Intelligence unleashed: An argument for AI in education*. Pearson Education. <https://oro.open.ac.uk/50104/>
- Meylani, R. (2024). Artificial Intelligence in Mathematics Teacher Education: A Systematic Review and Qualitative Synthesis of Contemporary Research Literature. *International Journal of Technology in Education Science*, 1(1), 63–91. <https://ijoftes.net/index.php/ijoftes/article/view/258/316>
- Molla, A., Yayeh, M., & Bisaw, A. (2023). The current status of faculty members' pedagogical competence in developing 21st century skills at selected universities in Ethiopia. *Cogent Education*, 10(2), 2228995. <https://doi.org/10.1080/2331186X.2023.2228995>
- Moher, D., Liberati, A., Tetzlaff, J., Altman, D. G., & The PRISMA Group. (2009). Preferred reporting items for systematic reviews and meta-analyses: The PRISMA statement. *PLoS Medicine*, 6(7). <https://doi.org/10.1371/journal.pmed.1000097>
- Michel-Villarreal, R., Vilalta-Perdomo, E., Salinas-Navarro, D., Thierry-Aguilera, R., & Gerardou, F. S. (2023). Challenges and opportunities of generative AI for higher education as explained by ChatGPT. *Education Sciences*, 13(9), Article 856. <https://doi.org/10.3390/educsci13090856>

- Prill, R., Karlsson, J., Ayeni, O. R., & Becker, R. (2021). Author guidelines for conducting systematic reviews and meta-analyses. *Knee Surgery, Sports Traumatology, Arthroscopy*, 29(9), 2739-2744. <https://doi.org/10.1007/s00167-021-06631-7>
- Raji, I. D., Scheuerman, M., & Amironesei, R. (2021). You can't sit with us: Exclusionary pedagogy in AI ethics education. In *Proceedings of the 2021 ACM Conference on Fairness, Accountability, and Transparency* (pp. 515–525). <https://doi.org/10.1145/3442188.3445914>
- Sánchez-Ruiz, L., Moll-López, S., Nuñez-Pérez, A., Morano-Fernández, J., & Vega-Fleitas, E. (2023). ChatGPT challenges blended learning methodologies in engineering education: A case study in mathematics. *Applied Sciences*, 13(10), Article 6039. <https://doi.org/10.3390/app13106039>
- Saldanha, E. S., da Costa, E., Takeleb, A. M., Piedade, S. D. R., & da Costa, C. A. (2024). Transforming Education in Timor-Leste: The Role of E-Learning and Artificial Intelligence in Boosting Student Achievements. In *International Conference on Computers in Education*. <https://doi.org/10.58459/icce.2024.5033>
- Seaton, K. (2020). Academic integrity in mathematics education: breaking the silence. In *A research agenda for academic integrity* (pp. 175-186). Edward Elgar Publishing.
- Snyder, H. (2019). Literature review as a research methodology: An overview and guidelines. *Journal of Business Research*, 104, 333–339. <https://doi.org/10.1016/j.jbusres.2019.07.039>
- Tadesse, T., & Gillies, R. M. (2015). Nurturing ICT competency in prospective teachers: The case of teacher education institutions in Ethiopia. *Australasian Journal of Educational Technology*, 31(4), 436–449. <https://doi.org/10.14742/ajet.1663>
- Thomas, J., & Harden, A. (2008). Methods for the thematic synthesis of qualitative research in systematic reviews. *BMC Medical Research Methodology*, 8(1), 45. <https://doi.org/10.1186/1471-2288-8-45>
- Wardat, Y., Tashtoush, M. A., Alali, R., & Jarrah, A. M. (2023). ChatGPT: A revolutionary tool for teaching and learning mathematics. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(6), Article em2312. <https://doi.org/10.29333/ejmste/13272>
- Xiao, Y., & Zhi, Y. (2023). An exploratory study of EFL learners' use of ChatGPT for language learning tasks: Experience and perceptions. *Languages*, 8(3), Article 212. <https://doi.org/10.3390/languages8030212>
- Yu, H., Miao, C., Leung, C., & White, T. (2017). Towards AI-powered personalization in MOOC learning. *NPJ Science of Learning*, 2. <https://doi.org/10.1038/s41539-017-0016-3>
- Zawacki-Richter, O., Marín, V. I., Bond, M., & Gouverneur, F. (2019). Systematic review of research on artificial intelligence applications in higher education – where are the educators? *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, 16(1), 1–27. <https://doi.org/10.1186/s41239-019-0171-0>

ELEMENTARY MATHEMATICS EDUCATION JOURNAL

Editorial Office: Palacký University Olomouc

Faculty of Education

Department of Mathematics

Address: Žižkovo nám. 5, 77900 Olomouc, Czech Republic

Phone: +420 58 563 5709

E-mail: emej@upol.cz

Electronic edition: <http://emejournal.upol.cz/issues>

2025

Vol. 7, No. 1

ISSN 2694-8133