

Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics

The Union of Czech Mathematicians and Physicists, Olomouc branch



Elementary Mathematics Education Journal

2024

EME

Elementary Mathematics Education
Journal

Vol. 6

No. 2



Olomouc 2024

ISSN 2694-8133

Univerzita Palackého v Olomouci

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

ve spolupráci s

Jednotou českých matematiků a fyziků

pobočný spolek Olomouc

Elementary Mathematics Education Journal

ročník 6, číslo 2

2024

Palacký University Olomouc
Faculty of Education
Department of Mathematics

in cooperation with

The Union of Czech Mathematicians and Physicists
Olomouc branch

Elementary Mathematics Education Journal

Vol. 6, No. 2

2024

Elementary Mathematics Education Journal

<http://emejournal.upol.cz>

Vydavatel: Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky
Žižkovo nám. 5, 77900 Olomouc, Česká republika

Předseda redakční rady: David Nocar (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika)

Redakční rada: Daniela Bímová (Technická univerzita v Liberci, Česká republika), Csaba Csíkos (Eötvös Loránd Tudományegyetem, Maďarsko), Radka Dofková (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika), Ján Gunčaga (Univerzita Komenského v Bratislave, Slovensko), Pavol Hanzel (Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, Slovensko), Vlastimil Chytrý (Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem, Česká republika), Michaela Kaslová (Univerzita Karlova, Česká republika), Eszter Herendiné Kónya (Debreceni Egyetem, Maďarsko), Janka Kopáčová (Katolícka univerzita v Ružomberku, Slovensko), Radek Krpec (Ostravská univerzita, Česká republika), Josef Molnár (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika & Jednota českých matematiků a fyziků, pobočný spolek Olomouc), David Nocar (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika), Bohumil Novák (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika), Eva Nováková (Masarykova Univerzita, Česká republika), Edita Partová (Univerzita Komenského v Bratislave, Slovensko), Šárka Pěchoučková (Západočeská univerzita v Plzni, Česká republika), Milan Pokorný (Trnavská univerzita v Trnave, Slovensko), Alena Prídavková (Prešovská univerzita v Prešove, Slovensko), Jana Příhonská (Technická univerzita v Liberci, Česká republika), Grażyna Rygał (Uniwersytet Humanistyczno-Przyrodniczy im. Jana Długosza w Częstochowie, Polsko), Libuše Samková (Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Česká republika), Iveta Scholtzová (Prešovská univerzita v Prešove, Slovensko), Ewa Swoboda (Państwowa Wyższa Szkoła Techniczno-Ekonomiczna w Jarosławiu im. ks. Bronisława Markiewicza, Polsko), Ilona Olahne Teglassi (Eszterházy Károly Egyetem, Maďarsko), Martina Uhlířová (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika), Patrik Voštinár (Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, Slovensko), Katarína Žilková (Univerzita Komenského v Bratislave, Slovensko)

Redakce:

David Nocar (výkonný redaktor, editor), Radka Dofková (redaktor – editor), Martina Uhlířová (redaktor – příjem článků), Květoslav Bártek (redaktor – web administrátor)

Adresa a kontakty:

Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci
Žižkovo nám. 5, 77900 Olomouc, Česká republika
emej@upol.cz

Informace pro autory:

Časopis uveřejňuje články k aktuálním problémům z teorie elementární matematiky, o inovacích, trendech a výzkumech v primárním a preprimárním matematickém vzdělávání. Jednotlivé články jsou anonymně posuzovány dvěma odborníky v recenzním řízení typu „double-blind peer review“. Další informace a podrobné pokyny pro autory jsou k dispozici na webu: <http://emejournal.upol.cz>.

Za kvalitu obrázků, jazykovou správnost, dodržení bibliografické normy a dodržování publikační etiky odpovídají autoři jednotlivých článků.

Časopis vychází dvakrát ročně.

Ročník 6, číslo 2

Eds. © David Nocar, Radka Dofková, 2024

© Univerzita Palackého v Olomouci, 2024

ISSN 2694-8133

Elementary Mathematics Education Journal

<http://emejournal.upol.cz>

Publisher: Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics
Žižkovo nám. 5, 77900 Olomouc, Czech Republic

Editor-in-chief: David Nocar (Palacký University Olomouc, Czech Republic)

Editorial Board: Daniela Bímová (Technical University of Liberec, Czech Republic), Csaba Csíkos (Eötvös Loránd University, Hungary), Radka Dofková (Palacký University Olomouc, Czech Republic), Ján Gunčaga (Comenius University in Bratislava, Slovakia), Pavol Hanzel (Matej Bel University, Slovakia), Vlastimil Chytrý (Jan Evangelista Purkyně University in Ústí nad Labem, Czech Republic), Michaela Kaslová (Charles University, Czech Republic), Eszter Herendiné Kónya (University of Debrecen, Hungary), Janka Kopáčová (Catholic University in Ružomberok, Slovakia), Radek Krpec (University of Ostrava, Czech Republic), Josef Molnár (Palacký University Olomouc, Czech Republic & The Union of Czech Mathematicians and Physicists, Olomouc branch), David Nocar (Palacký University Olomouc, Czech Republic), Bohumil Novák (Palacký University Olomouc, Czech Republic), Eva Nováková (Masaryk University, Czech Republic), Edita Partová (Comenius University in Bratislava, Slovakia), Šárka Pěchoučková (University of West Bohemia, Czech Republic), Milan Pokorný (Trnava University, Slovakia), Alena Prídavková (University of Prešov, Slovakia), Jana Příhonská (Technical University of Liberec, Czech Republic), Grażyna Rygał (Jan Długosz University in Czeszochowa, Poland), Libuše Samková (University of South Bohemia in České Budějovice, Czech Republic), Iveta Scholtzová (University of Prešov, Slovakia), Ewa Swoboda (State Higher School of Technology and Economics in Jarosław, Poland), Ilona Olahne Teglas (Eszterhazy Karoly University, Hungary), Martina Uhlířová (Palacký University Olomouc, Czech Republic), Patrik Voštinár (Matej Bel University, Slovakia), Katarína Žilková (Comenius University in Bratislava, Slovakia)

Redaction:

David Nocar (executive redactor, editor), Radka Dofková (redactor – editor), Martina Uhlířová (redactor – receiving articles), Květoslav Bártek (redactor – web administrator)

Address and contacts:

Department of Mathematics, Faculty of Education, Palacký University Olomouc
Žižkovo nám. 5, 77900 Olomouc, Czech Republic
emej@upol.cz

Information for authors:

The journal publishes articles on current issues in the theory of elementary mathematics, about innovation, trends and research in primary and pre-primary mathematics education. Each article is reviewed by two anonymous experts (“double-blind peer review”). More information and other instructions for authors are available at: <http://emejournal.upol.cz>.

The authors of the articles are responsible for the quality of the images, language accuracy, compliance with bibliographic standards and adherence to publication ethics.

The journal is published twice a year.

Vol. 6, No. 2

Eds. © David Nocar, Radka Dofková, 2024

© Palacký University Olomouc, 2024

ISSN 2694-8133

Obsah

Květoslav BÁRTEK, Eva BÁRTKOVÁ, Kamil MRKVAN, Agim KAZIMI: <i>Od jednoduchých úloh k problémům reálného světa: Umělá inteligence a její možnosti v řešení logických úloh</i>	6
Karel PASTOR: <i>Rudratova jezdcova šachová procházka</i>	14
Eliška ŠTĚPÁNOVÁ, Šárka PĚCHOUČKOVÁ: <i>Využití přírodovědy ve výuce matematiky na 1. stupni základní školy</i>	21
Martina UHLÍŘOVÁ, Jitka LAITCHOVÁ, Jakub UHLÍŘ, Lucie ŠTAFOVÁ: <i>Ukázka rozvíjení matematické pregramotnosti v kontextu využití digitální pomůcky Bee-Bot</i>	26
Jan WOSSALA, Klára STIXOVÁ, Tomáš HOLADA, Veronika VESELÁ: <i>Názornost v matematice s využitím aplikace Corinth 3D a GeoGebra</i>	34
Renáta ZEMANOVÁ: <i>Gradované série úloh ve vysokoškolské geometrii</i>	43

Content

Květoslav BÁRTEK, Eva BÁRTKOVÁ, Kamil MRKVAN, Agim KAZIMI: <i>From simple problems to real-world problems: Artificial intelligence and its potential in logic problem solving</i>	6
Karel PASTOR: <i>The Rudrata knight's tour</i>	14
Eliška ŠTĚPÁNOVÁ, Šárka PĚCHOUČKOVÁ: <i>The use of science in the teaching of mathematics in the 1st grade of primary school</i>	21
Martina UHLÍŘOVÁ, Jitka LAITCHOVÁ, Jakub UHLÍŘ, Lucie ŠTAFOVÁ: <i>An example of the development of mathematical pre-literacy in the context of using the Bee-Bot digital tool</i>	26
Jan WOSSALA, Klára STIXOVÁ, Tomáš HOLADA, Veronika VESELÁ: <i>Visualisation in mathematics using Corinth 3D and GeoGebra</i>	34
Renáta ZEMANOVÁ: <i>Graded series of problems in university geometry</i>	43

OD JEDNODUCHÝCH ÚLOH K PROBLÉMŮM REÁLNÉHO SVĚTA: UMĚLÁ INTELIGENCE A JEJÍ MOŽNOSTI V ŘEŠENÍ LOGICKÝCH ÚLOH

Květoslav BÁRTEK¹, Eva BÁRTKOVÁ¹, Kamil MRKVAN¹, Agim KAZIMI¹

¹Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta (Česká republika)

kvetoslav.bartek@upol.cz, eva.bartkova@upol.cz, kamil.mrkvan01@upol.cz,

agim.kazimi01@upol.cz

Abstrakt

Článek se zabývá možnostmi využití nástrojů umělé inteligence (AI), jako jsou ChatGPT, Copilot a Gemini, k řešení logických úloh. Na konkrétním příkladu logické úlohy typu Zebra autoři demonstrují, jak tyto nástroje reagují na zadané úlohy a jaké jsou jejich silné a slabé stránky. Studie ukazuje, že AI nástroje mohou být užitečnými pomocníky při řešení logických úloh, ale je důležité kriticky posuzovat jejich výstupy a v případě potřeby je ověřovat. V závislosti na formulaci problému a doplňujících otázkách, které jsou nástroji AI položeny, se mohou výsledky jejich snažení lišit. V budoucnu by se výzkum mohl zaměřit na hlubší analýzu schopností jednotlivých nástrojů a na vývoj metod, které by jim umožnily efektivněji řešit komplexní logické úlohy, a to i s přesahem do problémů reálného světa, případně je samostatně vytvářet.

Klíčová slova: umělá inteligence, AI, ChatGPT, Copilot, Gemini, logické úlohy, úlohy typu Zebra, řešení problémů, srovnání nástrojů, možnosti AI, limity AI

FROM SIMPLE PROBLEMS TO REAL-WORLD PROBLEMS: ARTIFICIAL INTELLIGENCE AND ITS POTENTIAL IN LOGIC PROBLEM SOLVING

Abstract

This paper explores the possibilities of using artificial intelligence (AI) tools such as ChatGPT, Copilot and Gemini to solve logic problems. Using the specific example of a Zebra logic problem, the authors demonstrate how these tools respond to the given tasks and what their strengths and weaknesses are. The study shows that AI tools can be useful aids in solving logic tasks, but it is important to critically assess their outputs and validate them when necessary. Depending on the problem formulation and additional questions that are asked by the AI tools, the results of their efforts may vary. Future research could focus on a deeper analysis of the capabilities of each tool and on developing methods that would allow them to solve complex logic problems more efficiently, even with overlap into real-world problems.

Keywords: artificial intelligence, AI, ChatGPT, Copilot, Gemini, logic tasks, Zebra tasks, problem solving, tool comparison, AI capabilities, AI limits

1. Úvod

Řešení logických úloh na 1. stupni ZŠ je důležitou součástí rozvoje matematického myšlení žáků, která rozvíjí nejen matematické schopnosti a dovednosti, ale i klíčové kognitivní funkce dětí. Učitelé mají díky jejich zařazování a vhodnému výběru možnost podporovat u žáků rozvoj analytického myšlení, divergentního myšlení, schopnosti hledat různé způsoby řešení problémů a vyvozovat závěry na základě individuálních zkušeností. Logické úlohy jsou skvělé pro individuální přístup, protože se dají přizpůsobit různé úrovni dovedností a schopností žáků.

Kromě rozvoje kognitivních schopností mohou logické úlohy podporovat i samostatnost a kreativitu. Učitelé mohou využít různé metody, jako jsou diskuse o různých možných postupech řešení nebo vzájemné porovnávání výsledků a postupů mezi žáky, což rozvíjí sociální interakci a týmovou práci.

Učitelé by měli volit úlohy, které jsou pro žáky zajímavé a motivující. Důležité je také, aby učitelé žáky vedli k systematickému řešení úloh a k ověřování správnosti řešení.

Pro žáky je často řešení úloh výzvou, jejíž zvládnutí se jim může zpočátku jevit jako složité. Jsou-li však žáci vhodně vedeni, mohou se počáteční strach a obavy z řešení logických úloh změnit na zábavu a jistou formu odpočinku. Vhodným vedením je třeba vytvořit prostředí otevřené diskusi, bez strachu z neúspěchu, kde se chyba stává nástrojem pro další učení. Pro žáky je řešení takových úloh způsobem, kterým se učí sebedisciplíně, trpělivosti a vytrvalosti. Hledání více cest ke správnému řešení či více správným řešením je klíčové pro jejich další rozvoj v řešení matematických problémů, ale také řešení problémů každodenního života.

Pomocí nástrojů AI by učitelé mohli v rámci přípravy na svou výuku generovat množství logických úloh a zpestřit tak svým žákům hodiny matematiky. Abychom mohli nástroje AI pro tyto účely bezpečně používat, musíme si být jisti, že úlohám nástroje AI rozumí a dokáží je spolehlivě řešit. V dalším textu podrobně tři vybrané nástroje AI testu, v němž bude řešit relativně jednoduchou úlohu typu Zebra.

2. Úlohy typu Zebra

Problematikou úloh typu Zebra, které vymezuje jako logické kombinatorické úlohy, jež vyžadují správně k sobě přiřadit prvky několika různých množin na základě několika informací, se věnuje např. Volfová (2000).

Úlohy tohoto typu jsou obvykle prezentovány formou příběhu nebo scénáře, který popisuje vztahy mezi prvky několika různých množin. Obtížnost úloh se může lišit v závislosti na počtu množin a složitosti vodítek. Řešení úloh typu Zebra rozvíjí logické myšlení, dedukční schopnosti a schopnost analyzovat informace.

Příkladem úlohy typu Zebra je i úloha řešená v tomto článku, kterou jsme převzali z materiálů České školní inspekce (2021). Její zařazení do provedené studie plyne z její relativní jednoduchosti a vhodnosti i pro mladší žáky na 1. stupni základních škol.

Zadání úlohy:

Při vyhlašování vítězů šachového turnaje se stavěli účastníci postupně zleva od vítěze k 5. místu. Šachového turnaje se zúčastnili Honza, Monika, Jana, Magda a Tomáš.

Víme, že:

- **Honza a Monika skončili na sudém místě,**
- **Jana stála pouze vedle Honzy,**
- **Honza stál mezi Magdou a Janou.**

Kdo skončil v turnaji na třetím místě?

3. Řešení

Cílem je přiřadit každému účastníkovi šachového turnaje jeho umístění na základě daných vodítek. Řešení vyžaduje logickou dedukci a analýzu informací.

Mezi způsoby, jak uvedenou úlohu řešit patří grafické nebo tabulkové znázornění vstupních informací. Postupnou analýzou známých faktů dospějeme ke dvěma možnostem, jakým způsobem mohl závod dopadnout. Nicméně toto zjištění pro nás není natolik zásadní vzhledem k faktu, že naším úkolem bylo určit pořadí umístění konkrétní závodnice, které je v obou řešeních stejné. Více se řešením logickým úloh zabývají Uhlířová (2004), Novák (2012).

Tabulka 1. Úloha řešená tabulkovou metodou

1. řešení	Magda	Honza	Magda	Monika	Tomáš
	Jana		Jana		
2. řešení	Tomáš	Monika	Magda	Honza	Magda
			Jana		Jana

4. Metodologie

Pro řešení uvedené úlohy jsme vybrali tři volně dostupné, bezplatné nástroje umělé inteligence (dále jen AI) ChatGPT, Copilot a Gemini. Každému nástroji jsme na začátku zadali shodně formulovaný požadavek, tzv. prompt:

Vyřeš úlohu: Při vyhlašování vítězů šachového turnaje se stavěli účastníci postupně zleva od vítěze k 5. místu. Šachového turnaje se zúčastnili Honza, Monika, Jana, Magda a Tomáš. Víme, že:

- **Honza a Monika skončili na sudém místě,**
- **Jana stála pouze vedle Honzy,**
- **Honza stál mezi Magdou a Janou.**

Kdo skončil v turnaji na třetím místě?

Následně jsme sledovali správnost řešení a kvalitu argumentace použitého postupu a úvahy. V případě nepřesnosti či nesprávného logického závěru jsme zpřesňovali zadaný prompt a snažili jsme se nástroj AI navést na správné řešení.

5. Řešení pomocí nástrojů AI

Níže uvedená řešení jsou přesně citovanými, přepsanými výstupy, které nám jednotlivé nástroje AI vracely jako výsledky námi zadávaných promptů. Nebyly opraveny ani pravopisné chyby. Výsledky jsme zpracovali do přehledných tabulek, kdy jsme jednotlivé výstupy nástrojů AI uvedené v levé části tabulky opatřili komentářem umístěným do pravé části tabulky.

5.1. Řešení ChatGPT

Tabulka 2. Řešení pomocí nástroje ChatGPT

Podívejme se na všechny informace krok za krokem:	
1. Honza a Monika skončili na sudém místě: To znamená, že Honza a Monika jsou na 2. nebo 4. místě.	
2. Jana stála pouze vedle Honzy: Jana je tedy buď na místě před nebo po Honzovi.	

3. Honza stál mezi Magdou a Janou: Honza je mezi Magdou a Janou, což znamená, že Magda je buď na místě před Honzou, nebo za ním. Z těchto informací můžeme sestavit následující pořadí: • 1. místo: Zbývá pouze Tomáš, protože Monika a Honza jsou na sudém místě a Jana je vedle Honzy, takže Tomáš musí být na 1. místě. • 2. místo: Honza je na 2. místě, protože Monika je na 4. místě. • 3. místo: Jana, protože je vedle Honzy. • 4. místo: Monika, která je na sudém místě. • 5. místo: Magda, protože stála mezi Honzou a Janou. Výsledek: Na třetím místě skončila Jana.	
<i>Zadali jsme doplňující informace pomocí promptu:</i> <i>Toto řešení ale nesplňuje podmínku: "Jana stála pouze vedle Honzy".</i>	
Máte pravdu, omlouvám se za chybu. Podmínka, že Jana stála pouze vedle Honzy, znamená, že musí být přímo vedle něj, a nikoliv mezi ním a někým jiným. Pojďme tedy úlohu znovu projít s těmito informacemi: 1. Honza a Monika skončili na sudém místě – tedy buď na 2. nebo 4. místě. 2. Jana stála pouze vedle Honzy – znamená to, že Jana je na místě přímo vedle Honzy (tedy na místě 3 nebo 1). 3. Honza stál mezi Magdou a Janou – Honza je mezi Magdou a Janou, což znamená, že Magda musí být na místě 1 nebo 5, a Jana na místě 3 nebo 1. Krok za krokem: • 1. místo: Zbývá pouze Tomáš, protože Monika a Honza musí být na sudých místech, a Jana nemůže být na 1. místě, protože je vedle Honzy. • 2. místo: Honza, protože je na sudém místě a je mezi Magdou a Janou. • 3. místo: Jana, protože je vedle Honzy. • 4. místo: Monika, protože je na dalším sudém místě. • 5. místo: Magda, protože stála mezi Honzou a Janou. Výsledek: Na třetím místě skončila Jana.	
<i>Zadali jsme doplňující informace pomocí promptu:</i> <i>V argumentaci k řešení se uvádí, že: "Jana stála pouze vedle Honzy, znamená, že musí být přímo vedle něj, a nikoliv mezi ním a někým jiným." Přesto je výsledek: "Na třetím místě skončila Jana", což ale znamená, že Jana je mezi dvěma dalšími a ne pouze vedle Honzy.</i>	
Moc se omlouvám za záměnu v argumentaci a děkuji za trpělivost. Opravuji to. Skutečně, Jana stála pouze vedle Honzy znamená, že nemůže být mezi ním a nikým jiným. Tedy pokud Jana stojí na třetím místě, nemůže být mezi dvěma lidmi, ale pouze přímo vedle Honzy. Pojďme to opravit a zkusit ještě jednou. Zadané podmínky: 1. Honza a Monika skončili na sudém místě – buď na 2. nebo 4. místě. 2. Jana stála pouze vedle Honzy – musí stát přímo vedle něj, tedy buď na 1. nebo 3. místě. 3. Honza stál mezi Magdou a Janou – Honza je mezi Magdou a Janou, což znamená, že pokud je Honza mezi nimi, tak Magda musí být na 1. nebo 5. místě.	Výsledkem bylo neopravené „řešení“ v uvedeném znění.

Pořadí podle informací: • 1. místo: Zbývá pouze Tomáš, protože Monika a Honza jsou na sudých místech a Jana nemůže být na 1. místě, protože je vedle Honzy. • 2. místo: Honza, protože je na sudém místě. • 3. místo: Jana, protože je vedle Honzy (Jana nemůže být mezi dvěma lidmi, takže může být pouze přímo vedle něj). • 4. místo: Monika, protože je na sudém místě. • 5. místo: Magda, protože je mezi Honzou a Janou, a tedy musí být na 5. místě. Výsledek: Na třetím místě skončila Jana. Tímto způsobem splňujeme všechny podmínky.	
<i>Zadali jsme doplňující informace pomocí promptu:</i> To, že Jana stojí pouze vedle Honzy znamená, že vedle Jany (po její druhé ruce) již nikdo další nestojí. Řešení není správné.	
Omlouvám se za předchozí chyby, teď už jsem to pochopil správně. Pokud Jana stála pouze vedle Honzy, znamená to, že Jana nemůže stát mezi dvěma lidmi, ale pouze přímo vedle Honzy, tedy na 1. nebo 3. místě. Dále, Honza musí být mezi Magdou a Janou, což musí být bráno tak, že Magda je buď na 1. nebo 5. místě a Jana je přímo vedle Honzy. Pojďme to zkusit znovu, správně: Zadané podmínky: 1. Honza a Monika skončili na sudém místě – tedy Honza a Monika jsou buď na 2. nebo 4. místě. 2. Jana stála pouze vedle Honzy – Jana je tedy přímo vedle Honzy, což znamená, že pokud Honza je na 2. místě, Jana musí být na 3. místě. 3. Honza stál mezi Magdou a Janou – to znamená, že Magda je na 5. místě a Jana na 3. místě, přičemž Honza je na 2. místě. Krok za krokem: • 1. místo: Tomáš, protože je jediný, kdo zůstává na 1. místě. • 2. místo: Honza, protože je na sudém místě a je mezi Magdou a Janou. • 3. místo: Jana, protože je vedle Honzy. • 4. místo: Monika, protože je na dalším sudém místě. • 5. místo: Magda, protože stála mezi Honzou a Janou. Výsledek: Na třetím místě skončila Jana. Děkuji za trpělivost a za upozornění, že Jana skutečně nemůže být mezi dvěma lidmi, ale pouze vedle Honzy!	Nástroj AI stále trvá na prvotním řešení, chybu v argumentaci neodhalil
<i>Zadali jsme doplňující informace pomocí promptu:</i> Chyba: Jana je pouze vedle Honzy, tzn. může být pouze první či poslední.	
Děkuji za upozornění! Máte pravdu. Pojďme to opravit. Vyřešme to znovu podle všech podmínek: 1. Honza a Monika jsou na sudých místech. 2. Jana stála pouze vedle Honzy. 3. Honza stál mezi Magdou a Janou. Zkusme různé kombinace: • Pokud Honza je na 2. místě: ○ Pak Jana může být na 1. nebo 3. místě. ○ Pokud je Jana na 1. místě, Magda musí být na 3. místě, což nesplňuje podmínku 3. ○ Pokud je Jana na 3. místě, Magda musí být na 4. místě, což nesplňuje podmínku 2, protože Jana nebude pouze vedle Honzy.	Nástroj AI stále trvá na prvotním řešení, chybu v argumentaci neodhalil

• Pokud Honza je na 4. místě: ○ Pak Jana může být na 3. nebo 5. místě. ○ Pokud je Jana na 3. místě, Magda musí být na 2. místě a Monika na 5. místě. ○ Pokud je Jana na 5. místě, Magda musí být na 3. místě, což nesplňuje podmínku 2. S těchto kombinací vyplývá: 1. Magda 2. Tomáš 3. Jana 4. Honza 5. Monika Jana tedy skončila na třetím místě. Pokud máte nějaké další dotazy nebo jiná logická zadání, dejte vědět!	
--	--

5.2. Řešení Copilot

Tabulka 3. Řešení pomocí nástroje Copilot

Podívejme se na dané informace postupně, abychom určili, kdo skončil na třetím místě: 1. Honza a Monika skončili na sudém místě, to znamená, že mohli být na 2. nebo 4. místě. 2. Jana stála pouze vedle Honzy, což znamená, že Jana musí být hned vedle Honzy. 3. Honza stál mezi Magdou a Janou. Tedy Jana a Magda nemohou stát vedle sebe. Sestavme možné pořadí: • Pokud Honza skončil na 2. místě, Jana může být pouze na 1. nebo 3. místě. • Pokud Honza skončil na 4. místě, Jana může být pouze na 3. nebo 5. místě. Zde jsou tedy možné pořadí:		
Varianta 1:	Varianta 2:	
1. Jana 2. Honza 3. Magda 4. Monika 5. Tomáš	1. Magda 2. Honza 3. Jana 4. Monika 5. Tomáš	
V obou případech je Honza mezi Magdou a Janou. Když se podíváme na dané možnosti, vidíme, že Magda může být na třetím místě nebo Jana může být na třetím místě. Pokud však Jana stála pouze vedle Honzy, pak Magda by musela být na místě, které je vedle Honzy. Vzhledem k tomu, že Jana nemůže být vedle Magdy, správná odpověď je, že Jana je na třetím místě v druhé variantě. Závěrem tedy je, že Jana skončila na třetím místě.		
<i>Zadali jsme doplňující informace pomocí promptu: To, že Jana stojí pouze vedle Honzy znamená, že vedle Jany (po její druhé ruce) již nikdo další nestojí. Řešení není správné.</i>		

Rozumím, díky za upřesnění! Podívejme se na to znovu s touto informací: Víme, že: 1. Honza a Monika skončili na sudém místě. 2. Jana stála pouze vedle Honzy (tzn., že po její druhé straně nikdo nestál). 3. Honza stál mezi Magdou a Janou. Pojďme zkusit najít pořadí: • Pokud Honza je na 2. místě: ○ Jana musí být na 1. místě (protože pouze vedle Honzy). ○ Magda by musela být na 3. místě, protože Honza musí být mezi Magdou a Janou. ○ Monika by byla na 4. místě (jedno ze sudých míst). ○ Tomáš by skončil na 5. místě. Toto pořadí vypadá správně: 1. Jana 2. Honza 3. Magda 4. Monika 5. Tomáš Honza je mezi Magdou a Janou, Jana je pouze vedle Honzy a Monika je na sudém místě. Podle těchto informací je Magda na třetím místě. Děkuji za trpělivost. Pokud máte další dotazy nebo úlohy, rád pomůžu!	Vidíme, že nyní již Copilot úlohu vyřešil správně.
--	---

5.3. Řešení Gemini

Tabulka 4. Řešení pomocí nástroje Gemini

Jistě, pojďme si tuto úlohu vyřešit krok za krokem: 1. Zápis známých informací: • Máme pět účastníků: Honza, Monika, Jana, Magda a Tomáš. • Honza a Monika skončili na sudém místě (tedy 2. nebo 4.). • Jana stála vedle Honzy. • Honza stál mezi Magdou a Janou. 2. Rozbor možností: • Honza nemohl být první: Pokud by byl Honza první, nemohl by stát mezi Magdou a Janou. • Honza nemohl být pátý: Pokud by byl Honza pátý, nemohl by stát mezi Magdou a Janou. 3. Určení pozice Honzy a Jany: • Honza tedy mohl být druhý nebo čtvrtý. • Jana stála vedle Honzy, takže pokud byl Honza druhý, Jana musela být první nebo třetí. Pokud byl Honza čtvrtý, Jana musela být třetí nebo pátá. 4. Vyloučení Moniky: • Víme, že Honza a Monika skončili na sudém místě. Pokud by byl Honza druhý, Monika by musela být čtvrtá. Pokud by byl Honza čtvrtý, Monika by musela být druhá. 5. Určení pozic Magdy a Tomáše: • Honza stál mezi Magdou a Janou. To znamená, že Magda a Jana stojí na obou stranách Honzy. • Zbývá nám jedno volné místo pro Tomáše.	Nástroj Gemini jako jediný ze sledovaných nástrojů úspěšně vyřešil zadanou úlohu a to i bez dalších zpřesňujících promptů.
--	---

6. Řešení:

Nyní si můžeme sestavit kompletní pořadí:

- **Možnost 1:** Jana - Honza - Magda - Monika - Tomáš
- **Možnost 2:** Tomáš - Monika - Magda - Honza - Jana

Odpověď:

Na třetím místě se umístila Magda.

6. Závěr

Z naší studie vyplývá, že nástroje AI, jako jsou Copilot a Gemini, mohou být užitečnými pomocníky při řešení logických úloh typu Zebra. Nástroj Gemini dokázal úlohu vyřešit bezchybně na základě prvního požadavku. Nástroj Copilot poskytl po zadání prvotního požadavku nesprávné řešení, po upřesnění významu formulace zadání byl následně schopen úlohu vyřešit správně.

Nástroj ChatGPT i přes opakované upřesňování podmínek dospěl k nesprávnému výsledku. Rozdíly v řešení pomocí jednotlivých AI nástrojů jsou zřejmě způsobeny jejich charakteristikami – Chat GPT je nástroj se širokým záběrem využití, je známý svou univerzálností, má však omezenou schopnost hlubší analýzy. Mívá problémy s řešením nejednoznačných či velmi složitých úloh. Copilot je pak určen jako asistent pro programování a kódování, patrně by byl vhodnější pro hledání a naprogramování vlastního algoritmu pro řešení dané úlohy. Nakonec Gemini je vybaven silnými analytickými schopnostmi, je schopen pokročilé dedukce a vícestupňového myšlení.

Nástroje AI se sice neustále vyvíjejí a jejich schopnosti se zlepšují, i tak je stále důležité kriticky posuzovat jejich výstupy a v případě potřeby je ověřovat. V budoucnu by se výzkum mohl zaměřit na hlubší analýzu schopností jednotlivých nástrojů a na vývoj metod, které by jim umožnily efektivněji řešit komplexní logické úlohy a následně také generovat správná řešitelná zadání logických úloh.

Acknowledgements

Článek vznikl v rámci realizace projektu *Matematická gramotnost v kontextu Technology-based learning* (č. proj. IGA_PdF_2024_004) realizovaného na Katedře matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.

Literatura

- Janotová, Z., Hanušová, J., Chrobák, T., Olšáková, M., Fiala, V. a další. (2020). *Inspirace pro rozvoj gramotností PISA. Úlohy ze čtenářské, přírodovědné a matematické gramotnosti*. Česká školní inspekce, Praha.
- Novák, S. (2012). *O Zebrách*. Dostupné z: <https://clanky.rvp.cz/clanek/r/ZB/15431/O-ZEBRACH.html>.
- Uhlířová, M. (2004). Logické úlohy známé - neznámé. *Matematika, fyzika, informatika*, 14(2), 78–85.
- Volfová, M. (2000). *Metody řešení matematických úloh*. Gaudeamus, Hradec Králové.

RUDRATOVA JEZDCOVA ŠACHOVÁ PROCHÁZKA

Karel PASTOR¹

¹ Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta (Česká republika)
karel.pastor@upol.cz

Abstrakt

Otevřenou jezdcovu procházku na šachovnici 8×8 je možné realizovat mnoha způsoby. V našem článku se zaměříme na takové otevřené jezdcovy procházky, které docílíme rozdělením šachovnice 8×8 na dvě menší šachovnice 4×8 . Jezdcovu procházku provedeme nejprve na jedné šachovnici 4×8 , poté se jezdec přesune svým obvyklým tahem na druhou šachovnici 4×8 , na které jezdcovu procházku dokončíme. Z možných jezdcových procházek na šachovnici 4×8 vybereme Rudratovu, která je dobře zapamatovatelná a může tak být atraktivní i pro žáky od 6 do 11 let.

Klíčová slova: kombinatorické myšlení, šachy, deskové hry, matematické šachové problémy.

THE RUDRATA KNIGHT'S TOUR

Abstract

An open knight's tour on an 8×8 chessboard can be realized in many ways. Our article will focus on such open knight tours, which can be achieved by dividing the 8×8 chessboard into two smaller chessboards 4×8 . We first perform the knight's tour on one chessboard 4×8 , and then the knight moves with his usual move to the second chessboard 4×8 , on which we complete the knight's tour. From the possible knight tours on smaller chessboards 4×8 , we will select the Rudrata knight's tour that is easy to remember and can thus be attractive even for pupils from 6 to 11 years old.

Keywords: combinatorial thinking, chess, board games, mathematical chess problems.

1. Úvod

K rozvoji kombinatorických schopností žáků základní školy mohou významným způsobem přispět deskové hry. Šachová hra patří dlouhodobě mezi nejznámější deskové hry. K rozvoji kombinatorických schopností však není nutné hrani partii, což může být spolu s osvojením všech šachových pravidel poměrně zdlouhavé, a ne pro všechny žáky záživné, ale stačí, aby žák porozuměl chodu některých šachových figur a poté již může (s pomocí papíru nebo nějaké webové aplikace) matematické šachové úlohy řešit.

Základní matematické šachové úlohy jsou popsány například v (Chybová, 2017, 2018) nebo na (Wikipedia, 2024a). V našem článku se budeme věnovat jezdcovým procházkám po šachovnici. Připomeňme, že šachový jezdec se na šachovnici pohybuje tak, že se posune nejprve o dvě pole rovně a potom jedno pole do strany, tj. ve tvaru písmene L (Wikipedia, 2024b).

Jezdcovou procházkou pak rozumíme úlohu navštívit šachovým jezdcem všechna pole šachovnice právě jednou v souladu s jeho pohybem podle šachových pravidel. Pokud se šachový jezdec ze svého posledního navštíveného pole nemůže svým tahem dostat na pole začátku své procházky, hovoříme o otevřené jezdcově procházce. V opačném případě pak mluvíme o uzavřené procházce. Podle šachových pravidel se partie hrají na šachovnici 8×8 , nicméně jezdcovu procházku je možné realizovat i na jiných šachovnicích obdélníkového tvaru. Otázku, na kterých šachovnicích uzavřená jezdcova procházka existuje, kompletně řeší Schwenkova věta (Schwenk, 1991).

Věta (Schwenkova). *Pro všechna přirozená $m \leq n$ existuje na šachovnici $m \times n$ uzavřená jezdcova procházka právě tehdy, když není splněna žádná z následujících podmínek:*

- i. m a n jsou obě lichá čísla,
- ii. $m = 1, 2$ nebo 4 ,
- iii. $m = 3$ a $n = 4, 6$ nebo 8 .

Schwenkova věta tak například říká, že na šachovnici 9×9 nebo 3×8 uzavřená jezdcova procházka neexistuje, kdežto například na šachovnici 6×6 uzavřená jezdcova procházka existuje, jak potvrzuje obrázek 1.

13	36	23	28	15	2
22	27	14	1	24	29
7	12	35	26	3	16
34	21	8	17	30	25
11	6	19	32	9	4
20	33	10	5	18	31

Obrázek 1. Šachovnice 6×6

Realizovat otevřenou jezdcovu procházku je samozřejmě jednodušší než uzavřenou, pro žáky základní školy je tak vhodnější věnovat se především otevřeným jezdcovým procházkám. I to se může ukázat jako nelehký úkol, který je však možné modifikovat tím, že žáky vyzveme, aby se pokusili na dané šachovnici obdélníkového tvaru provést co nejdelší jezdcovu procházku.

A. Conradovi a jeho kolegům se podařilo dokázat větu (Conrad a kol., 1994), která jednoznačně udává, pro které šachovnice obdélníkového tvaru otevřená jezdcova procházka existuje.

Věta (Conrad a kol., 1994). *Pro všechna přirozená $m \leq n$ existuje na šachovnici $m \times n$ otevřená jezdcova procházka právě tehdy, když není splněna žádná z následujících podmínek:*

- i. $m = 1$ nebo 2 ,
- ii. $m = 3$ a $n = 3, 5$ nebo 6 ,
- iii. $m = 4$ a $n = 4$.

Podle předchozí věty nelze například najít otevřenou jezdcovu procházku na šachovnici 4×4 nebo 3×6 . Naopak existuje otevřená jezdcova procházka na šachovnici 5×5 (pro kterou podle Schwenkovy věty neexistuje uzavřená jezdcova procházka). Otevřená jezdcova procházka na šachovnici 5×5 patří zřejmě mezi nejsnáze realizovatelné – stačí začít jezdcovu procházku v některém rohu, poté se jezdcem „mechanicky“ pohybovat „dokola poblíž obvodu šachovnice“ a až ke konci procházky (na obrázku 2 to může být v okamžiku tahu 22) promyslet, jakým způsobem procházku zdárně dokončit.

1	14	9	20	3
24	19	2	15	10
13	8	23	4	21
18	25	6	11	16
7	12	17	22	5

Obrázek 2. Šachovnice 5×5

2. Rozdělení šachovnice

Při hledání jezdcovy procházky (ať už uzavřené neb otevřené) je v některých případech možné rozdělit danou šachovnici na šachovnice menších rozměrů a jezdcovu procházku realizovat postupně na každé z nich. Příkladem může být šachovnice 10×10 , kterou si můžeme rozdělit na 4 šachovnice 5×5 , jak ukazuje Obrázek 3.

Obrázek 3. Rozdělení šachovnice 10×10

Otevřenou jezdcovu procházku začneme (obrázek 4) v levé horní šachovnici 5×5 : budeme postupovat stejně jako na obrázku 2. Tahem 26 se přesuneme do dolní levé šachovnice 5×5 , ve které se můžeme jezdcem pohybovat nejprve stejně jako u levé horní šachovnice, ale při tahu 46 se od jezdcovy procházky v levé horní šachovnici odchýlíme tak, abychom se mohli 51. tahem přesunout do dolního rohu pravé dolní šachovnice 5×5 .

V pravé dolní šachovnici pak pokračujeme analogicky jako při předchozím vyplňování šachovnic 5×5 , tj. „dokola poblíž jejího obvodu“, přičemž 73. tah provedeme tak, abychom se 76. tahem mohli přesunout do pravé horní šachovnice 5×5 , kde jezdcovu procházku dokončíme.

1	14	9	20	3	82	87	92	97	80
24	19	2	15	10	93	100	81	86	91
13	8	23	4	21	88	83	98	79	96
18	25	6	11	16	99	94	77	90	85
7	12	17	22	5	76	89	84	95	78
26	39	34	45	28	57	62	67	72	55
47	44	27	40	35	68	75	56	61	66
38	33	46	29	50	63	58	73	54	71
43	48	31	36	41	74	69	52	65	60
32	37	42	49	30	51	64	59	70	53

Obrázek 4. Jezdcova procházka na šachovnici 10×10

Již zmíněná věta A. Conrada a jeho kolegů dokládá, že otevřenou jezdcovu procházku je možné uskutečnit na nekonečném množství šachovnic obdélníkového tvaru. Nicméně standardní šachovnice má rozměry 8×8 . Na šachovnici o těchto rozměrech je možné najít 9 795 914 085 489 952 otevřených jezdcových procházek za předpokladu, že dvě otevřené jezdcovy procházky lišící se pouze směrem budeme považovat za jedinou procházku (Knight's Tour Notes, 2023). Zkušenosti autora článku po zadání této úlohy žákům a studentům různých věkových kategorií ukazují, že provést kompletní jezdcovu procházku na několik prvních pokusů je výjimečnou záležitostí. Za velký úspěch řešitele je podle mínění autora možné považovat, pokud jezdcova procházka přesáhne 60 tahů. Pro žáky a studenty se zdá být zajímavé, když se seznámí s řešením úlohy, které se dá snadno zapamatovat.

Obrázek 5. Rozdělení šachovnice 8×8

Rozdělení šachovnice 8×8 na čtyři menší šachovnice (obrázek 5) obdobně jako tomu bylo v případě šachovnice 10×10 s cílem provést jezdcovu procházku postupně na každé šachovnici rozměru 4×4 však k cíli nevede, protože podle věty A. Conrada a jeho kolegů otevřená jezdcova procházka na šachovnici 4×4 neexistuje. Nicméně při této souvislosti zmiňme, že takové rozdělení šachovnice 8×8 využil Leonhard Euler v roce 1759, přičemž však v každé menší šachovnici rozdělil pole do 4 skupin a šachový jezdec při své procházce navštívil postupně vždy všechna pole stejného typu (na obrázku 6 se jedná nejprve o pole červená, pak modrá, bílá a nakonec zelená). Blíže je možné se s Eulerovou šachovou procházkou seznámit v (Chybová, 2017, 2018) nebo (Pastor, 2023).

1	54	21	40	15	58	17	42
22	39	2	55	20	41	14	59
53	4	37	24	57	16	43	18
38	23	56	3	44	19	60	13
5	52	25	36	9	62	31	46
26	35	8	49	32	45	12	61
51	6	33	28	63	10	47	30
34	27	50	7	48	29	64	11

Obrázek 6. Eulerova otevřená jezdcova procházka

3. Rundratova jezdcova procházka

Podle věty A. Conrada a jeho kolegů však existuje otevřená jezdcova procházka na šachovnici 4×8 . Těchto procházek existuje 124 352 (Wikipedia, 2024c). Budeme se dále zabývat jezdcovou procházkou kašmírského básníka Rudraty, který žil v 9. století našeho letopočtu (Wikipedia, 2024). Rudratova procházka může dobře posloužit našemu cíli ukázat žákům dobře zapamatovatelnou jezdcovu procházku na šachovnici 8×8 . Rudratova otevřená procházka je předvedena na obrázku 7 (Knight's Tour Notes, 2023). Všimněme si, že začneme v levém horním rohu a poté pokračujeme „dokola poblíž obvodu šachovnice“ až do tahu 16 (tedy poloviny jezdcovy procházky po šachovnici 4×8). Poté v dalším obdobném pokračování brání provedený tah 9, ale můžeme si všimnout, že je potřeba navštívit jezdcovou procházkou levý dolní roh šachovnice, což tahy 17-19 zajistíme a poté se vrátíme tahem 20 na obvod šachovnice. Nyní jezdcovu procházku dokončíme tak, abychom vyplnili pravý horní roh a abychom byli schopni se v případě šachovnice 8×8 dostat 33. tahem do levého horního rohu dolní poloviny šachovnice 8×8 .

1	30	9	20	3	24	11	26
16	19	2	29	10	27	4	23
31	8	17	14	21	6	25	12
18	15	32	7	28	13	22	5

Obrázek 7. Rudratova procházka

Jezdcova procházka na šachovnici 8×8 , kterou docílíme dvojím provedením Rundratovy jezdcovy procházky na šachovnici 4×8 , je znázorněna na obrázku 8.

1	30	9	20	3	24	11	26
16	19	2	29	10	27	4	23
31	8	17	14	21	6	25	12
18	15	32	7	28	13	22	5
33	62	41	52	35	56	43	58
48	51	34	61	42	59	36	55
63	40	49	46	53	38	57	44
50	47	64	39	60	45	54	37

Obrázek 8. Využití Rundratovy procházky

Pokud bychom na obrázku 33. tah provedli způsobem, který je uveden na obrázku 9, tak otevřenou jezdcovu procházku na dolní polovině šachovnice 8×8 můžeme také dokončit, například způsobem uvedeným na obrázku 9. Tento způsob až do 61. tahu kopíruje jezdcovu procházku zmíněnou v (Knight's Tour Notes, 2023) spolu s dalšími zajímavými poznámkami.

1	30	9	20	3	24	11	26
16	19	2	29	10	27	4	23
31	8	17	14	21	6	25	12
18	15	32	7	28	13	22	5
35	54	45	60	33	62	47	50
44	57	34	53	46	49	40	63
55	36	59	42	61	38	51	48
58	43	56	37	52	41	64	39

Obrázek 9. Alternativa Rundratovy procházky

4. Závěr

Provedení otevřené jezdcovy procházky na klasické šachovnici 8×8 může být pro žáky základních i středních škol zajímavou výzvou. V článku byla pozornost věnována především procházce, která dvakrát využívá Rundratovu jezdcovu procházku na šachovnici 4×8 . Algoritmus Rundratovy procházky je relativně lehce zapamatovatelný, což jej činí atraktivním i pro žáky 1. stupně ZŠ.

Dále jsme připomněli Schwarzovu větu a větu A. Conrada a jeho kolegů o existenci jezdcových procházek na šachovnicích obdélníkového tvaru, které mohou inspirovat učitele pro zadávání úkolu najít jezdcovu procházku i na jiné než standardní šachovnici 8×8 . Zájemci se pak mohou pokusit jezdcovu procházku také naprogramovat.

Literatura

- Conrad, A., Hindrichs, T., Morsy, H., & Wegener, I. (1994). Solution of the Knight's Hamiltonian Path Problem on Chessboards. *Discrete Applied Mathematics* 50(2). [https://doi.org/10.1016/0166-218X\(92\)00170-Q](https://doi.org/10.1016/0166-218X(92)00170-Q)
- Chybová, L. (2017). *Šachové úlohy v kombinatorice* [diploma thesis]. Charles University, Prague.
- Chybová, L. (2018). Šachové úlohy v kombinatorice. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 63(2), 125–147. <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/147328>
- Knight's Tour Notes. (2023). Compiled by George Jelliss © 2000–2025. Retrieved from <https://www.mayhematics.com/t/t.htm>
- Pastor, K. (2023). Eulerova šachová procházka. *Elementary Mathematics Education Journal*, 5(2), 46–52. https://emejournal.upol.cz/Issues/Vol5No2/Vol5No2_Pastor.pdf
- Schwenk, A. J. (1991). Which Rectangular Chessboard Have a Knight's Tour?. *Mathematics Magazine*, 64(5), 325–332. <https://doi.org/10.1080/0025570X.1991.11977627>
- Wikipedia. (2024a). *Mathematical chess problem*. Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_chess_problem
- Wikipedia. (2024b). *Pravidla šachů*. Retrieved from https://cs.wikipedia.org/wiki/Pravidla_šachů
- Wikipedia. (2024c). *Jezdcova procházka*. Retrieved from https://cs.wikipedia.org/wiki/Jezdcova_procházka

VYUŽITÍ PŘÍRODOVĚDY VE VÝUCE MATEMATIKY NA 1. STUPNI ZÁKLADNÍ ŠKOLY

Eliška ŠTĚPÁNOVÁ¹, Šárka PĚCHOUČKOVÁ¹

¹ Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická (Česká republika)

elik-stepanova@seznam.cz, pechouck@kmt.zcu.cz

Abstrakt

Propojení matematiky s ostatními předměty může žákům ukázat využití matematiky v jiných oborech lidské činnosti. V pátém ročníku základní školy proběhla sonda, jejímž cílem bylo připravit, realizovat a reflektovat činnosti propojující přírodovědné poznatky s matematikou. Vycházeli jsme z Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání, konkrétně ze vzdělávací oblasti Člověk a jeho svět a z průřezového tématu Environmentální výchova. Vytvořili jsme činnosti, které byly koncipovány tak, aby se žáci kromě procvičení matematických poznatků dozvěděli nové informace z přírodovědy nebo si upevnili ty známé. Realizovali jsme didaktickou hru a krátkou badatelsky orientovanou aktivitu, řešili slovní úlohy a provedli jednoduché statistické šetření. Jednalo se především o motivační aktivity nebo činnosti sloužící k upevnění učiva obou předmětů. Na základě výsledků a reflexí jednotlivých činností jsme zjistili, že úspěšnější byla realizace motivačních aktivit.

Klíčová slova: matematika, přírodověda, integrace, primární škola

THE USE OF SCIENCE IN THE TEACHING OF MATHEMATICS IN THE 1ST GRADE OF PRIMARY SCHOOL

Abstract

Connecting mathematics with other subjects can show students the use of mathematics in other fields of human activity. In the fifth year of elementary school, a probe was held, the goal of which was to prepare, implement and reflect on activities connecting science knowledge with mathematics. We were based on the Framework Educational Program for Basic Education, specifically from the educational area Man and his World and from the cross-cutting topic Environmental Education. We created activities that were designed so that, in addition to practicing mathematical knowledge, students learn new information or consolidate what they already know. We implemented a didactic game and a short research-oriented activity, solved word problems and carried out a simple statistical investigation. These were primarily motivational activities or activities used to consolidate the curriculum of both subjects. Based on the results and reflections of individual activities, we found that the implementation of motivational activities was more successful.

Keywords: mathematics, science, integration, primary school

1. Úvod

Dítě si již od narození prakticky vytváří porozumění světu, který je obklopuje. Do školy tedy přichází s určitými znalostmi a zkušenostmi. Učitel má za úkol tyto znalosti a zkušenosti uvádět na pravou míru a dále je rozvíjet. Žákům totiž často unikají souvislosti v kontextu s jinými poznatky, i když jsou schopni se jednotlivé věci naučit velmi rychle. Informace, které jim dáme, berou jako daná fakta a nepřemýšlí o nich v různých perspektivách. Proto bychom jim měli souvislost a komplexnost ukazovat při každé příležitosti, kterou nám učivo nabízí (Starý, Rusek, 2019). Důležitou roli v tomto procesu hrají mezipředmětové vztahy.

2. Mezipředmětové vztahy

S myšlenkou mezipředmětového nebo nadpředmětového myšlení a komplexního pojetí vědění přišel už Jan Amos Komenský. Velkou inspirací v této problematice je jeho spis *Obecná porada o nápravě věcí lidských*, ve kterém popisoval, kam má lidské poznání směřovat (Komenský, 1992).

Vladimír Spousta vymezuje mezipředmětové vztahy jako vyjádření jakéhokoliv druhu vzájemného sblížení dvou nebo více objektů nebo jejich vlastností (Spousta, 1997).

Pedagogický slovník (Průcha, Walterová, Mareš, 2009, s. 154) popisuje mezipředmětové vztahy takto: „Vazby mezi jednotlivými vyučovacími předměty přesahující předmětový rámec, podporující pochopení souvislostí dílčích obsahů, prostředek integrace obsahu vzdělávání. Tradičně byly vyjadřovány v učebních osnovách jednotlivých předmětů jako tzv. mezipředmětová témata nebo realizovány v interdisciplinárních předmětech, např. rodinná výchova, výchova spotřebitele, domácí hospodaření. Ve vzdělávacích programech (RVP ZV, RVP G apod.) jsou nyní vyčleněny jako samostatná průřezová témata a zdůrazněny jejich vazby na obsahové oblasti, které se realizují ve výuce různými formami (mezipředmětová témata, projekty, nové předměty).“

Mezipředmětové vztahy můžeme z hlediska obsahové souvislosti rozdělit na vertikální a horizontální. U vertikálních mezipředmětových vztahů využíváme nynější znalosti z předmětu pro pochopení problematiky probírané později. Horizontální mezipředmětové vztahy představují znalosti ze dvou a více předmětů souběžně tj. v jednom čase, kdy se vzájemně doplňují a rozšiřují (Starý, Rusek, 2008).

3. Sonda na základní škole

V pátém ročníku základní školy se uskutečnila sonda, jejímž cílem bylo připravit, realizovat a analyzovat činnosti propojující přírodovědné poznatky s matematikou. Jednalo se tedy o spojení matematiky s přírodovědou. Vycházeli jsme z Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání, konkrétně ze vzdělávací oblasti *Člověk a jeho svět* a z průřezových témat, a vytvořili jsme činnosti, které byly koncipovány tak, aby se žáci kromě procvičení matematických dovedností dozvěděli nové informace z přírodovědy nebo si upevnili již ty známé.

Vzdělávací oblast *Člověk a jeho svět* obsahuje pět témat (RVP ZV, 2023):

- Místo, kde žijeme
- Lidé kolem nás
- Lidé a čas
- Rozmanitost přírody
- Člověk a jeho zdraví

Stěžejním pro nás bylo téma Rozmanitost přírody, ve kterém žáci poznávají rozmanitost a proměnlivost živé i neživé přírody v České republice, jsou vedeni k tomu, aby si uvědomili, že všechny přírodní děje jsou v rovnováze, kterou může člověk snadno svými zásahy porušit, a hledají možnosti, jak ve svém věku přispět k ochraně přírody (RVP ZV, 2023).

V etapě základního vzdělávání jsou vymezena tato průřezová témata (RVP ZV, 2023):

- Osobnostní a sociální výchova
- Výchova demokratického občana
- Výchova k myšlení v evropských a globálních souvislostech
- Multikulturní výchova
- Environmentální výchova
- Mediální výchova

V rámci sondy jsme se ještě zaměřili na průřezové téma Environmentální výchova, která vede žáky k aktivní účasti na ochraně a utváření životního prostředí, a vytvořili jsme jednotlivé činnosti, jež je možné průběžně zařazovat do výuky matematiky v pátém ročníku. Z důvodu omezeného rozsahu článku podrobněji popíšeme jen několik činností se stručnou reflexí žáků.

3.1. Kolik bych vážil na jiné planetě?

Činnost byla zaměřena na procvičení početních operací s přirozenými čísly a desetinnými čísly, na práci se zlomky (konkrétně se jednalo o určování části z celku) a na opakování poznatků o planetách Sluneční soustavy. Aktivita se uskutečnila v závěru školního roku a byla zařazena do vyučovací hodiny matematiky, která navazovala na hodinu přírodovědy, ve které se žáci seznamovali s planetami Sluneční soustavy. Před vlastní činností jsme planety zopakovali a připomněli si, co zajímavého o nich víme, a vypočítali jsme i několik příkladů na určení části z celku. Následovala motivační část, ve které jsme si uvedli, že na každé planetě bychom vážili jinak a že se pokusíme určit svou hmotnost. Každý žák poté dostal pracovní list a kalkulačku. Zadání úlohy bylo následující:

Planeta	Výpočet	Hmotnost
Merkur		
Venuše		
Země		
Mars		
Jupiter		
Saturn		
Uran		
Neptun		

Na nejvzdálenější planetě od Slunce musíš svou hmotnost násobit číslem 112 a poté vydělit číslem 100.

Na planetě nejbliže ke Slunci svou hmotnost vydělíš třemi.

Na největší planetě je tvá hmotnost dvojnásobná v porovnání se Zemí.

Na planetě s jasně viditelným prstencem musíš od své hmotnosti odečíst $\frac{1}{10}$ své hmotnosti.

Na velké modré planetě musíš svou hmotnost vynásobit číslem 0,9.

Na planetě, kterou nazýváme Jitřenka, odečti od své hmotnosti $\frac{1}{10}$ této hmotnosti.

Na planetě, kterou chtějí lidé v budoucnosti osídlit, musíš svou hmotnost vydělit třemi.

Na jaké planetě máš největší hmotnost?

Na jaké planetě vážíš nejméně?

Kolikrát větší hmotnost máš na Jupiteru než na Merkuru?

Úkoly byly zadány formou „hádanek“ tak, aby nebyl uveden název planety, ale žáci ho zjistili na základě informace obsažené v úkolu. Tím si tedy opakovali přírodovědné učivo. Žáci měli možnost aktivně si pomáhat ve dvojicích, i když každý pracoval s jiným vstupním údajem.

Zjistit z textu, o jakou planetu se jedná, nedělalo žákům žádné potíže. První úkol, kdy bylo potřeba hmotnost násobit číslem 112 a poté vydělit číslem 100, jsme realizovali frontálně. Poté již žáci pracovali samostatně a měli možnost si navzájem pomáhat ve dvojicích. Vzhledem k tomu, že žáci používali kalkulačku, neobjevily se žádné problémy s úkoly, ve kterých prováděli početní operace násobení nebo dělení v oboru přirozených čísel nebo operaci násobení desetinným číslem. Potíže však nastaly při výpočtu části celku, konkrétně určení jedné desetiny ze své hmotnosti a odečtení této části celku od své hmotnosti. Jednalo se tedy o složenou slovní úlohu. Při samostatné práci jsme chodili mezi žáky, kontrolovali je, upozorňovali na chyby.

3.2. Třídění odpadků ve třídě

Jednalo se o environmentální aktivitu, která se týkala třídění odpadů ve třídě. Činnost byla koncipována tak, aby probíhala v režii žáků, my jsme pouze jejich nápady do určité míry usměrňovali a pomáhali při organizaci. Aktivitu jsme rozdělili do tří dnů. První den jsme si na začátku vyučování připomněli, jak je důležité třídít odpad a co by se s naší planetou stalo, kdybychom vyhazovali všechno na jednu hromadu. Zopakovali jsme si, co všechno třídíme a do jakých kontejnerů. Diskutovali jsme o tom, jak žáci doma třídí a jaké množství odpadu vyprodukují. V rámci diskuse se objevil nápad zjistit, kolik odpadků a jakého druhu během jednoho dne nashromáždíme ve třídě. Během vyučování jsme připravili několik krabic na různý odpad a tabulku na nástěnku, abychom mohli následující den „naš experiment“ uskutečnit. Každý žák měl během celého vyučování (4 vyučovací hodiny) za úkol třídít odpad a zaznamenat pomocí čárek, jaký odpad vyhodil. Žáci svědomitě třídili odpad a zapisovali čárky do připravené tabulky. Pokud někdo něco vyhodil a zapomněl udělat čárku, ostatní mu to připomněli. Žáci tak spolupracovali na této aktivitě jak během hodin, tak i během přestávek a vedli se vzájemně k zodpovědnosti třídít.

Třetí den jsme při hodině matematiky společně zpracovali výsledky a zaznamenali je do tabulky (tab. 1). Diskutovali jsme o tom, kolik jakého odpadu jsme vyhodili a proč. Shodli jsme se na tom, že důvodem velkého množství papíru byla hodina výtvarné výchovy, při které jsme s papírem pracovali. Ostatní odpad byl vyhozen během velké přestávky při svačině. Poté se žáci měli zamyslet nad tím, jak bychom mohli dále získané údaje využít. Vzhledem k tomu, že jsme v předchozích hodinách matematiky řešili slovní úlohy a žáci projevíli přání vyzkoušet si vytvořit zadání slovních úloh, navrhli žáci, abychom získaná data využili pro tvorbu slovních úloh.

Tabulka 1. Třídění odpadu

Organické zbytky	Papír	Plasty	Ostatní odpad
5	63	13	23

Žáci se tedy rozdělili do skupin a jejich úkolem bylo ze získaných údajů vytvořit alespoň dvě slovní úlohy. Podmínkou bylo, aby vytvořené slovní úlohy nebyly na stejné početní operace. Vytvořenou slovní úlohu pak vyřešili, aby si ověřili, že ji sestavili správně. Vytvořené slovní úlohy v průběhu této a následujících vyučovacích hodin jednotlivé skupiny představily ostatním. Společně jsme zkontrolovali, zda jsou správně sestaveny, v případě potřeby text upravili a žáci je pak samostatně počítali. Během počítání členové autorské skupiny obcházelí ostatní spolužáky, pomáhali jim a kontrolovali výpočty.

Ukázka vytvořených slovních úloh:

Vytrídili jsme 104 odpadků, z toho 63 papírů, 5 organických zbytků a 23 ostatních odpadků. Kolik plastů jsme vytrídili?

Za 1 den jsme vytrídili 104 odpadků. Kolik odpadků jsme vytrídili za březen, když jsme každý den vytrídili 104 odpadků?

Slovní úlohy žáci vymýšleli ve skupinách a diskutovali nad jednotlivými nápady, jak by měla jejich slovní úloha vypadat. Bohužel se v některých skupinách objevili jedinci, kteří se dostatečně nezapojovali do práce ani po intervenci spolužáků či učitele.

4. Závěr

Sonda ukázala, že je pro žáky přínosné i zajímavé propojovat matematiku s přírodovědou. Učitelé by tedy měli učit své žáky souvislostem a to nejen s jinými předměty, ale i s běžným životem. To je pro dnešní svět velice důležité a stále je to opomíjeno.

Literatura

- Komenský, J. A. (1992). *Obecná porada o nápravě věcí lidských*. Nakladatelství Svoboda, Praha.
- MŠMT ČR. (2023). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. <https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/>
- Průcha, J., Walterová, E., & Mareš, J. (2009). *Pedagogický slovník*. Portál, Praha.
- Spousta, V. (1997). *Integrace základních druhů umění ve výuce*. Masarykova univerzita.
- Starý, K., & Rusek, M. (2019). *Rozvoj mezipředmětových vztahů ve škole. Metodický materiál pro učitele*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta. https://pages.pedf.cuni.cz/sc25/files/2020/02/Rozvoj_mezipredmetovych_vztahu_.pdf

UKÁZKA ROZVÍJENÍ MATEMATICKÉ PŘEGRAMOTNOSTI V KONTEXTU VYUŽITÍ DIGITÁLNÍ POMŮCKY BEE-BOT

Martina UHLÍŘOVÁ¹, Jitka LAITCHOVÁ¹, Jakub UHLÍŘ¹, Lucie ŠTAFOVÁ¹

¹Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta (Česká republika)

martina.uhlirova@upol.cz, jitka.laitochova@upol.cz, jakub.uhlir01@upol.cz,

lucie.stafova01@upo.cz

Abstrakt

S matematikou a matematickými pojmy se setkáváme v každodenním životě. Potřebujeme počítat peníze, zjistit, v kolik nám odjíždí autobus, vážit potraviny, hledat optimální cestu na mapě, určit pravděpodobnost výhry. Pro naše matematické myšlení je důležitý rozvoj matematických představ již v předškolním věku dítěte. Právě v tomto období můžeme položit dobrý základ pro naše matematické myšlení a uvažování.

V článku budeme vycházet z výsledků studie *Matematická a čtenářská pregramotnost v předškolním vzdělávání 1* (MRPL1), do které se zapojilo 119 učitelů ze 72 mateřských škol z České republiky. Pozornost bude věnována využití moderních robotických pomůcek, které vychází z trendu začleňování digitálních technologií do předškolního vzdělávání. (Uhlířová, 2022)

Z výsledků studie je povzbudivé, že učitelé projevíli zájem o nové nápady. Zajímali je aktivity spojené s využitím robotických pomůcek. V současné době má k dispozici robotické pomůcky pouze malá část mateřských škol. Nejčastěji je k dispozici Bee-Bot. Většina učitelů se shodla na nedostatku metodické podpory k využití digitálních pomůcek. Popularizace Bee-Bota a jeho edukační využití by mohla do mateřských škol dostat více digitálních pomůcek a vést k jejich efektivnímu využití.

Na základě zjištění výzkumu MRPL1 byl realizován pedagogický experiment. Byl vytvořen soubor pěti předškolních vzdělávacích aktivit se zaměřením na rozvíjení matematických představ pomocí práce s digitální pomůckou Bee-Bot. Všechny aktivity byly ověřeny v pedagogické praxi MŠ. Byla použita metoda zúčastněného pozorování. Experimentu se zúčastnily děti ve věku 3-7 let. V textu článku se podrobně věnujeme realizované aktivitě Labyrint. Na základě experimentu jsme dospěli k závěru, že cílené zařazení Bee-bota a dalších robotických hraček do předškolního vzdělávání má smysl nejen v rámci rozvoje matematické pregramotnosti, ale napomáhá i dalším složkám jejich kognitivního rozvoje.

Klíčová slova: matematická pregramotnost, mateřská škola, robotické hračky, Bee-Bot

AN EXAMPLE OF THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL PRE-LITERACY IN THE CONTEXT OF USING THE BEE-BOT DIGITAL TOOL

Abstract

We encounter mathematics and mathematical concepts in everyday life. We need to calculate money, to find out what time our bus leaves, to weight groceries, to look for the optimal route, to determine the probability of winning. For our mathematical thinking, the development of mathematical ideas already in the preschool age is important. It is during this period that we can lay a good foundation for our mathematical thinking and reasoning.

The article is based on the results of the study *Mathematical and reading pre-literacy in preschool education 1* (MRPL1) in which 119 teachers from 72 kindergartens in the Czech Republic participated. Attention is paid to the use of modern robotic aids, which is based on the trend of incorporating digital technologies into preschool education. (Uhlířová, 2022)

It is encouraging from the results of the study that teachers showed interest in new ideas. They were interested in activities connected with the use of robotic aids. Currently, only a small part of kindergartens have robotic aids at their disposal. Bee-Bot is most often available. Most teachers agreed on the lack of methodological support for the use of digital aids. The popularization of Bee-Bot and its educational use could bring more digital aids to kindergartens and lead to their effective use.

Based on the findings of the MRPL1 research, a pedagogical experiment was implemented. A set of five preschool educational activities was created with a focus on developing mathematical ideas by working with the Bee-Bot digital aid. All activities were verified in the pedagogical practice of kindergartens. Participant observation method was used. Children of the age 3 to 7 years took part in the experiment. In the text of the article, we focus on the implemented Labyrinth activity in detail. Based on the experiment, we came to the conclusion that the targeted inclusion of Bee-Bot and other robotic toys in preschool education makes sense not only within the framework of the development of mathematical pre-literacy, but also helps other components of their cognitive development.

Keywords: mathematical pre-literacy, kindergarten, robotic toys, Bee-Bot

1. Úvod

Vymezení pojmu matematické gramotnosti není v odborné literatuře jednotné. Řada autorů vychází z definice matematické gramotnosti komise pro mezinárodní výzkum OECD PISA. „Matematická gramotnost je schopnost jedince poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana.“ (PISA 2003). V odborné literatuře je také často zmiňován přístup, kdy matematickou gramotnost vnímáme jako oborovou kompetenci, která má průřezový a nadoborový charakter. V případě matematické gramotnosti se jedná o složitý komplex vzájemně se podmiňujících a prolínajících vědomostí, dovedností, postojů a hodnot, které se vzájemně prolínají s klíčovými kompetencemi a ostatními gramotnostmi. Lze říci, že matematická gramotnost se projevuje tehdy, když dítě/žák využívá své znalosti a dovednosti při řešení různých typů problémů, které mohou mít nadoborový kontext. Jde o využívání matematických kompetencí v celé řadě situací, od každodenních jednoduchých až po neobvyklé a složité. Matematickou pregramotnost vnímáme jako matematickou gramotnost rozvíjenou v předškolním období dítěte. (Uhlířová, 2018)

Robotické hračky se stávají fenoménem současné doby. Podstatou těchto hraček je, že dítě může samo „naprogramovat“, jak se hračka bude chovat. Robotické hračky poskytují nový typ edukačního prostředí, které má silný motivační rámec. Podporují objevování metodou „pokusu a omylu“, umožňují okamžitou zpětnou vazbu i aktivní práci s chybou. Při systematicky vedených aktivitách mají významný potenciál pro rozvíjení kognitivních schopností dětí. K nejznámějším hračkám tohoto typu vhodných pro předškolní věk patří Bee Bot, Blue Bot, Code-a-pillar, Code & Go Robot Mouse, Botley Robot, Ozobot. V našem příspěvku se budeme věnovat Bee-Bot.

1.1 Bee-Bot

Včelka Bee-Bot (BB) je robotická, interaktivní pomůcka, která pomáhá dětem nenásilnou formou rozvíjet dovednosti a znalosti v různých oblastech. BB je určená dětem předškolního a mladšího školního věku. Práce s BB podporuje u dětí rozvoj logického myšlení, algoritmického myšlení, rozvíjí orientaci v rovině i prostoru. Vhodně zvolené aktivity s BB podporují komunikační dovednosti, spolupráci dětí, plánování, aktivní práci s chybou (její identifikaci a následnou korekci), kreativitu.

V rámci matematické pregramotnosti mohou aktivity s BB rozvíjet matematické představy ve všech oblastech. Uvedme zejména oblast geometrické představivosti, logického, algoritmického a kombinatorického myšlení. Aktivity mohou být zaměřeny na upevňování geometrických pojmů, představ spojených s mnohostí, předoperační myšlení.



Obrázek 1. Bee-Bot

BB má vizuální podobu včely. V horní části krytu má hračka zabudovaný soubor ovládacích tlačítek pro pohyb dopředu, dozadu, otočení doprava, otočení doleva, tlačítko GO pro povel jed', PAUSE pro přerušení pohybu a RESET pro vymazání paměti. Podstatou práce s BB je "naprogramování" pohybu včely tak, aby se přesunula na dané místo. Zpravidla se s BB pracuje v kombinaci s tematickou podložkou se čtvercovou sítí. BB se však může pohybovat po libovolném hladkém povrchu. Je možné „naprogramovat“ až 40 příkazů.

1.2 Matematická a čtenářská pregramotnost v předškolním vzdělávání

Studie Matematická a čtenářská předškolní gramotnost v předškolním vzdělávání 1 (MRPLE1) byla zaměřena na zkoumání edukačního prostředí mateřských škol v kontextu rozvoje matematické a čtenářské pregramotnosti u dětí a na reflexi výuky učitelů mateřských škol se zaměřením o rozvoji výše uvedené gramotnosti. (Uhlířová & Laitochová, 2020) Výzkumu se zúčastnilo 119 učitelek ze 72 mateřských škol v České republice. Některé otázky byly zaměřeny na robotické hračky a jejich využití v prostředí mateřských škol. Pouze 8 (tj. 6,7 %) učitelů uvedlo, že mají ve své školce robotické hračky. Ve všech případech to byl BB. Všichni respondenti, kteří mají ve školce BB, uvedli, že by měli zájem o metodickou podporu při práci s robotickými hračkami. Celkem 81 respondentů (tj. 68,07 %) uvedlo, že učitelé mají zájem o nové možnosti.

Na základě závěrů výzkumu věnují autoři hlubší pozornost možnosti smysluplného zapojení robotických hraček do edukačního prostředí mateřských škol. Zaměřují se na vytváření vhodných metodických materiálů a jejich ověřování v pedagogické praxi.

2. Pedagogický experiment Moje město s Bee-Bot

V příspěvku jsou prezentovány dílčí výsledky pedagogického experimentu nazvaného Moje Město s Bee-Bot. Experiment byl realizován v mateřské škole v Ostravě v období února a března 2022. Jednalo se o jednotřídní mateřskou školu, kterou navštěvuje celkem 20 dětí ve věku 3 – 6 let. Do experimentu bylo zapojeno 12 dětí, které byly rozděleny dle věku do 3 skupin P1 (3-4 roky), P2 (4-5 let), P3 (5-6 let). V každé skupině byly 4 respondenti. Cílem experimentu bylo ověřit, zda je práce s BB vhodná pro rozvíjení matematických představ dětí v mateřské škole. Kladli jsme si následující otázky: Má práce s Bee-Bot pro děti motivační charakter? Vede práce s Bee-Bot děti k aktivnímu řešení matematických problémů?

Výzkum byl veden metodou záměrného, přímého pedagogického pozorování tří věkově homogenních skupin dětí při práci na souboru předem připravených a formulovaných vzdělávacích činností. Výkony dětí byly hodnoceny pomocí numerické posuzovací škály 1–5 a byly zaznamenány do pozorovacích protokolů.

- 1 – Dítě nepochopilo zadání a nezvládlo úkol.
- 2 – Dítě pochopilo zadání, ale nezvládlo úkol.
- 3 – Dítě pochopilo zadání. Úkol zvládá s obtížemi.
- 4 – Dítě pochopilo zadání. Úkol zvládá téměř bez obtíží.
- 5 – Dítě pochopilo zadání. Úkol zvládlo bez obtíží.

V rámci experimentu byl sestaven soubor 5 edukačních aktivit (A1–A5) se zaměřením na rozvíjení matematických představ dětí prostřednictvím práce s BB. Jednotlivé aktivity byly gradovány ve 3 stupních obtížnosti pro jednotlivé věkové kategorie (P1, P2, P3). Všechny aktivity propojovalo jednotné projektové téma: Moje město – Ostrava. Aktivity byly koncipovány se vzrůstající náročností. Časová dotace jednotlivých aktivit byla pro každou skupinu 45 minut.

Do experimentu byly zahrnuty následující aktivity (Konečná, 2022):

- Moje město – seznámení s Bee-Bot (A1)
- Těžíme uhlí (A2)
- Návštěva ZOO (A3)
- Labyrint (A4)
- Bee-Bot průvodce městem (A5)

Aktivity A1, A2, A3, A5 děti realizovaly individuálně, aktivita A4 byla určena pro spolupráci v týmu. Pro realizaci aktivit byl vypracován soubor pracovních karet s tematikou dominanty města Ostrava, zvířátka v ZOO, těžba uhlí. Vzhledem k omezenému rozsahu příspěvku představíme v následujícím textu podrobně aktivitu Labyrint (A4).

3.1 Labyrint (A4)

Cílem aktivity je naprogramovat včelku BB tak, aby “navštívila” vybrané dominanty města Ostrava (pracovní karty), které jsou umístěny na pracovní podložce.



Obrázek 2. Tematické vkládací karty

Popis aktivity: Děti si z rozmístěných pracovních karet na podložce vyberou příslušný počet. Plánovanou cestu ohraničí kostkami ze stavebnice Lego Duplo. BB naprogramují tak, aby navštívila dětmi vybrané dominanty. Z oblasti matematických představ se v rámci aktivity rozvíjí orientace v rovině a algoritmické myšlení. Při řešení úkolu hraje důležitou roli schopnost komunikace a vzájemné kooperace. Pro tuto aktivitu bylo zvoleno pět hodnotících kritérií K1–K5:

- Algoritmizace – programování BB (K1)
- Orientace v rovině (K2)
- Komunikace v týmu (K3)
- Kooperace v týmu (K4)
- Schopnost práce s překážkou (K5)



Obrázek 3. Aktivita Labyrint (A4)

Pro jednotlivé skupiny byla obtížnost úkolu gradovaná. Skupina P1 pracovala s 3 pracovními kartami a vybírala pouze 1 dominantu, skupina P2 pracovala s 5 pracovními kartami a vybírala 2 dominanty, skupina P3 pracovala s 5 kartami a vybírala 3 dominanty. P2 a P3 již pracovaly i s prvkem “překážky”.

Aktivita byla realizována ve 3 blocích pro jednotlivé věkové skupiny. Děti se na aktivitu těšily a zapojily se se zájmem. BB pro ně nebyl “novinkou”. Všechny děti již zvládaly základy práce s BB bez větších potíží. Specifikem aktivity byla nutnost vzájemné komunikace a kooperace.

3.1.1 Věková skupina 3–4 roky (P1, respondenti A, B, C, D)

Dětem byla aktivita nejprve představena a detailně popsány požadavky pro první část úkolu, tedy pro stavbu cesty z kostek pro včelku Bee-bot. V úvodu bylo potřeba, aby děti společně vybraly cíl, ke kterému povedou cestu. V oblasti komunikace si děti B a D vedly dobře, pouze s mírnými obtížemi. Obě děti komunikovaly se všemi dalšími účastníky úkolu a popisovaly svůj záměr při stavbě. Menší obtíže dětem činilo naslouchání názorům ostatních dětí. Děti A a C zaznamenaly obtíže jak u vlastního projevu, tak u percepce komunikace ostatních dětí. Zapomínaly, že na aktivitu nejsou samy, bylo obtížné pro ně vyjádřit vlastní záměry. V rámci koordinace a spolupráce ve skupině panovaly rovněž větší obtíže. Děti B, C, D, i přes snahu dohodnout se na postupu, nevěděly, jak na to a potřebovaly menší pomoc zvenčí. Koordinace a spolupráce úzce souvisí s komunikací. Děti, které dokážou lépe komunikovat, se pak zvládají lépe domluvit na společné práci a společném postupu. Dítě A nezvládalo spolupráci vůbec. Práci na společném úkolu provádělo bez ohledu na další děti. Jejich společnou stavbu z kostek bořilo, odstraňovalo již položené kostky a nahrazovalo je svými kostkami. Po dokončení “stavby z kostek” si každé z dětí vyzkoušelo naprogramovat trasu včelky k vytyčenému cíli.

Tabulka 1. Hodnocení aktivity Labyrint (A4) skupiny P1

Respondent	K1	K2	K3	K4
A	5	5	3	2
B	5	5	4	3
C	4	4	3	3
D	5	5	4	3

Manipulaci robotické pomůcky tři ze čtyř dětí zvládly zcela bez problémů, a to děti A, B, D. Dítě C zaznamenalo menší obtíže, které bylo schopno samo v průběhu programování napravit. Srovnatelných výsledků děti zaznamenaly v orientaci na ploše podložky. Respondenti B a D zvládly aktivitu s menšími obtížemi, respondenti A a C s většími obtížemi. Škálově ohodnocení výkonů respondentů skupiny P1 zachycuje tabulka 1.

3.1.2 Věková skupina 4-5 let (P2, respondenti F, G, H, I)

Stejně jako u předchozí skupiny, i zde byl úkol rozdělen do dvou částí. Dětem bylo představeno pět dominant Ostravska rozmístěných na ploše podložky. Děti dostaly za úkol vybrat společně dvě z těchto pěti dominant a postavit k nim cesty pro včelku za užití kostek. Vzhledem k tomu, že se jednalo o společný úkol, byla dětem zdůrazněna důležitost vzájemné spolupráce. U této věkové kategorie je již z tabulky (Tabulka 2) patrné, že v otázkách komunikace i kooperace a spolupráce jsou na tom již lépe než mladší děti. Komunikaci ve skupině zvládly nejlépe děti H a I. Tyto děti byly schopny prezentovat svá přání a plány pro stavbu a rovněž byly schopné a ochotné naslouchat kamarádům. Dítě F mělo menší problémy v respektování prostoru pro vyjádření ostatních dětí. Dítě G mělo problémy jak v prezentaci vlastních názorů a vizí, tak v naslouchání ostatním. Koordinaci a spolupráci již zvládly děti H, I bez problémů. Jak již bylo řečeno výše, spolupráce úzce souvisí s komunikací. Tyto děti bez problému komunikovaly své vize, byly schopné se domluvit jak na výběru dominant, tak na postupu při práci s kostkami. Rovněž dokázaly společně vyřešit obtíže při špatně zvoleném postupu stavby (tzn., když cesta logicky nedávala smysl pro “trasu” včelky). Dítě F komunikovalo především s ohledem na své potřeby, v otázce respektování potřeb ostatních nebylo příliš otevřené, ale nakonec bylo schopno se s ostatními domluvit. Respondent G se potýkal s největšími problémy. Obecně je ale potřeba u této skupiny vyzdvihnout schopnost spolupráce jako celku.

Tabulka 2. Hodnocení aktivity Labyrint (A4) skupiny P2

Respondent	K1	K2	K3	K4	K5
F	5	5	4	4	4
G	4	5	3	3	5
H	5	5	5	5	5
I	5	5	5	5	5

V druhé části aktivity měly děti za úkol provést robotickou včelku postavenými cestami. Děti F, H, I zvládly manipulaci s včelkou Bee-bot zcela bez problémů. Dítě G s menšími obtížemi. Orientaci na ploše podložky zvládly všechny děti výborně. Práci s překážkou si děti v této fázi již osvojili také uspokojivě. Děti G, H, I si s překážkami poradily vždy, dítě F zpravidla s menší pomocí ostatních. Celkově zvládly děti H, I úkol výborně, Dítě F s menšími obtížemi v komunikaci, spolupráci a při práci s překážkou, dítě G se potýkalo s výraznějšími obtížemi v průběhu celé aktivity.

3.1.3 Věková skupina 5-6 let (P3, respondenti K, L, M, N)

V první části aktivity si děti vedly s podobnou úspěšností jako předchozí skupina. V rámci komunikace, koordinace a spolupráce si děti vedly následovně: děti K, L byly schopny spolupracovat při plánování svého řešení stavby cesty a brát v potaz názory kamarádů. Pracovaly společně, navzájem si radily a upozorňovaly se na obtíže při stavbě. Vedly si výborně. Dítě N rovněž spolupracovalo, ale bylo pro něj těžké vyjádřit své nápady. Dítě M se nedokázalo soustředit na společný úkol. Při výběru dominant se aktivně zapojovalo, při samotné stavbě už jej však rozptylovaly jiné podněty a těžko se vracelo pozorností zpátky k zadanému úkolu. Zohlednit překážku při stavbě cesty zvládly všechny děti. V druhé části úkolu si děti vedly velmi dobře. Naprogramovat včelku k vybraným cílům zvládly všechny děti. Děti K, L, N zvládly manipulaci s robotickou pomůckou i orientaci na ploše zcela bez problémů. Dítě M mělo menší opakuji se obtíže při programování, avšak při orientaci v rovině si již vedlo skvěle. Děti K a L zvládli splnit všechny úkoly bez potíží. Dítě N se potýkalo s menšími obtížemi v rámci komunikace a spolupráce. Dítě M se pak potýkalo v první části úkolu s výraznými obtížemi a v druhé fázi s menšími přetrvávajícími obtížemi při manipulaci s BB.

Tabulka 3. Hodnocení aktivity Labyrint (A4) skupiny P3

Respondent	K1	K2	K3	K4	K5
K	5	5	5	5	5
L	5	5	5	5	5
M	4	5	3	3	5
N	5	5	4	4	5

Celkově je možné konstatovat, že ve všech věkových skupinách byly registrovány rozdíly ve výkonech jednotlivých respondentů. Z výsledků usuzujeme, že náročnost aktivit byla adekvátní. U všech respondentů bylo v průběhu experimentu patrné zlepšení jejich výkonu. Při cíleném opakování aktivit lze u dětí docílit schopnosti přemýšlet o programovaném algoritmu několik kroků dopředu. Ve skupině předškolních dětí (P3) byl maximálně dosažen počet 10 kroků. Nejobtížnější aktivitou experimentu byla aktivita A5, která měla vysoké nároky na paměť dětí.

3. Závěr

Výsledky pedagogického experimentu ukázaly, že Bee-Bot má pro děti silný motivační akcent. Práce s touto robotickou hračkou děti většinou zaujala, zvolené aktivity vedly děti k soustředěnému řešení zadaných matematických problémů. Děti spontánně projevily svoji kreativitu k hledání různých řešení dané úlohy. Přirozeně přistupovaly k divergentnímu řešení. Bylo zřejmé posílení komunikační a kooperační složky v případě spolupráce na řešení úkolu. Výsledky výzkumu také ukázaly, že BB je možné využít k rozvíjení matematických představ dětí v prostředí mateřské školy již od věku 3 let.

Pro práci s BB v prostředí MŠ je vhodné nejprve zvolit samostatnou práci dítěte s pomůckou. Mladší děti při práci ve větší skupině rychle ztrácí zájem a motivaci. Spolupráci na vybraném úkolu je pak možno zařadit až u předškolních dětí.

Domníváme se, že cílené zařazení Bee-Bot i dalších robotických hraček do předškolního vzdělávání má smysl pro rozvoj nejen matematické pregramotnosti dětí, ale i dalších složek jejich kognitivního rozvoje. Podstatná je dostupnost metodické podpory pro učitele. Domníváme se, že je důležité sestavit soubor metodickým materiálů pro práci s Bee-Bot pro jednotlivé věkové kategorie s důrazem na rozvoj matematického myšlení dětí a tyto materiály zpřístupnit učitelům z praxe.

Acknowledgements

Článek vznikl v rámci realizace projektu *Matematická gramotnost v kontextu Technology-based learning* (č. proj. IGA_PdF_2024_004) realizovaného na Katedře matematiky PdF UP v Olomouci.

Literatura

- Gramotnosti ve vzdělávání. Příručka pro učitele. (2010). VÚP, Praha. https://archiv-nuv.npi.cz/uploads/Publikace/vup/Gramotnosti_ve_vzdelavani11.pdf
- Chráská, M. (2016). *Metody pedagogického výzkumu. Základy kvantitativního výzkumu*. Grada Publishing.
- Konečná V. (2022). Bee-Bot jako netradiční didaktická pomůcka v předškolním vzdělávání [Diploma thesis]. Palacký University Olomouc.
- Nemčíková. K. a kol. (2011). *Matematická gramotnost ve výuce. Metodická příručka*. NÚV, Praha.
- PISA 2003. (2004). *Koncepce matematické gramotnosti ve výzkumu PISA 2003*. ÚIV, Praha. https://www.csicr.cz/CSICR/media/Prilohy/2004_přilohy/Mezinárodní%20šetření/Koncepce-matem-gramotnosti-publikace.pdf
- Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání. (2017). MŠMT, Praha. <http://www.msmt.cz/vzdelavani/predskolni-vzdelavani/ramcovy-vzdelavaci-program-pro-predskolni-vzdelavani-od-1>
- Uhlířová, M., & Laitochová, J. (2020). Kindergarten Teacher's Reflection about the Development of Children's Mathematical Pre-Literacy. In L. G. Chova, A. L. Martínez, & I. C. Torres (Eds.). *INTED2020 Proceedings* (pp 3632–3638). IATED, Valencia.
- Uhlířová, M., Laitochová, J., & Adedokun, D. (2022). Developing mathematical pre-literacy and robotic toys from the perspective of school practice. In M. Carno (Ed.). *Education and New Developments 2022 – Volume I* (pp 244–246). inScience Press, Lisboa. https://doi.org/10.36315/Education-and-New-Developments_2022_Vol_I
- Uhlířová, M. (2015). Pre-service Primary Teacher Attitudes towards Mathematics. In: L. G. Chova, A. L. Martínez, & I. C. Torres (Eds.). *ICERI2015 Proceedings* (pp 5756–5763). IATED, Seville.

NÁZORNOST V MATEMATICE S VYUŽITÍM APLIKACE CORINTH 3D A GEOGEBRA

Jan WOSSALA¹, Klára STIXOVÁ¹, Tomáš HOLADA¹, Veronika VESELÁ¹

¹Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta (Česká republika)

jan.wossala@upol.cz, klara.stixova02@upol.cz, tomas.holada01@upol.cz,

veronika.vesela03@upol.cz

Abstrakt

Názornost je jedním z klíčových pilířů vzdělávání v oblasti (nejen) matematiky. Příspěvek navazuje na dřívější článek Zásada názornosti v matematice s využitím programu GeoGebra, který se zaměřoval na úvod do několika příkladů využití GeoGebry pro vizualizace ve výuce matematiky. Tento článek původní myšlenky rozvíjí a komparuje příklady využití dvou různých nástrojů – aplikace Corinth 3D a aplikace GeoGebra. Cílem článku je tedy rozšířit povědomí čtenářů o možnostech volby aplikací pro pedagogickou praxi vyučování matematice.

Klíčová slova: matematika, geometrie, krychle, síť tělesa, Platónská tělesa, GeoGebra, Corinth 3D

VISUALISATION IN MATHEMATICS USING CORINTH 3D AND GEOGEBRA

Abstract

Visualisation is one of the key pillars of education in (not only) mathematics. This paper builds on an earlier article, The Principle of Visualisation in Mathematics Using GeoGebra, which focused on an introduction to several examples of using GeoGebra to enhance visualisation in mathematics education. This article expands on the original ideas and compares examples of using two different tools - Corinth 3D and GeoGebra. Thus, the aim of the article is to broaden readers' awareness of the choices of applications for pedagogical practice in mathematics teaching.

Keywords: mathematics, geometry, cube, solid mesh, Platonic solids, GeoGebra, Corinth 3D

1. Úvod

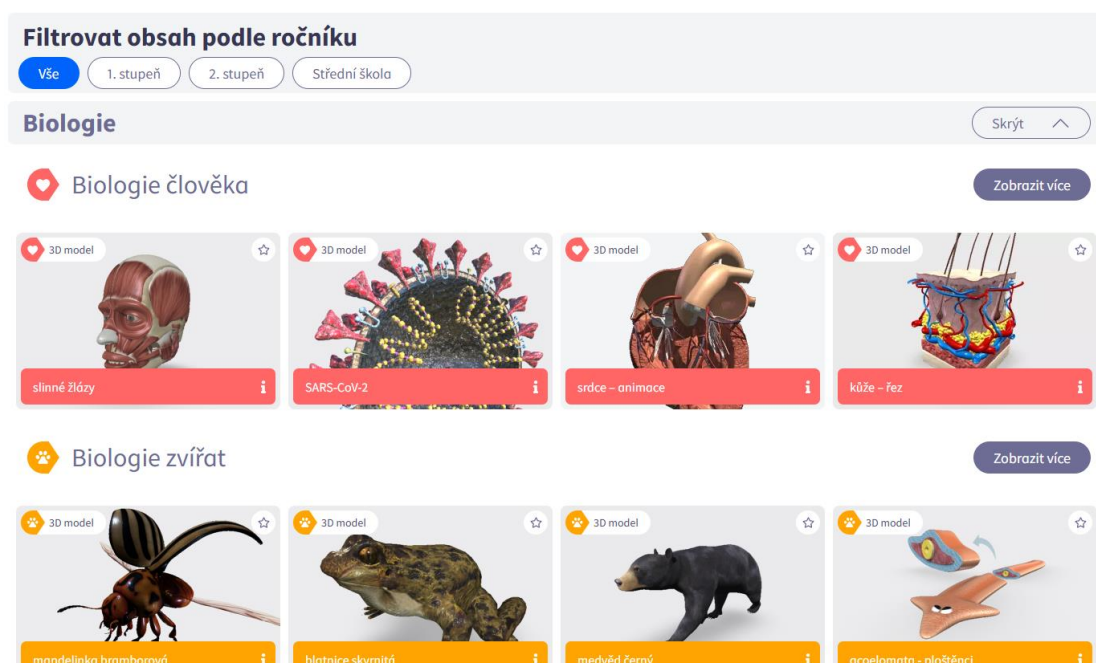
Názornost je jedním ze stěžejních pilířů vzdělávacího procesu. Byla a je zdůrazňována mnoha významnými pedagogy po celá staletí. Učitelovo jednání v souladu s touto zásadou bývá zpravidla spojováno se zrakovým vnímáním (Kalhous, Obst, 2002). Bývá vymezena např. jako způsob, jakým lze přenést matematickou myšlenku do fyzické podoby nebo zkušenosti (Coulon a kol., 2023).

Učitelé mají nepřeberné množství způsobů, jak zlepšit vizualizaci probíraného učiva. Tento článek prezentuje ukázkou využití dvou aplikací, které pomáhají vizualizovat vybrané oblasti základní matematiky. Těmito programy bude placená aplikace Corinth 3D a bezplatná aplikace GeoGebra.

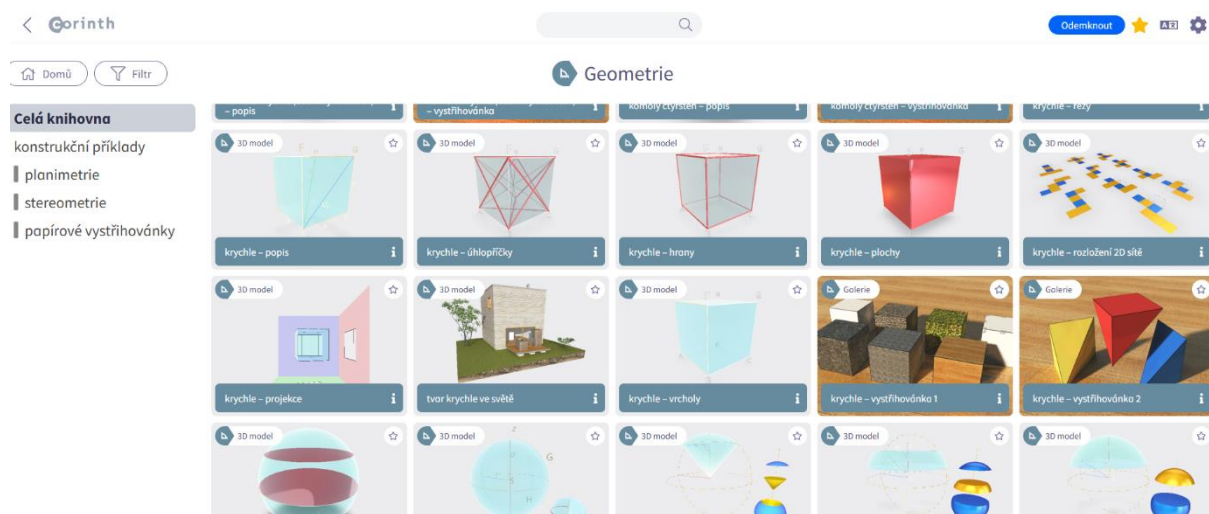
2. Corinth 3D a GeoGebra

Zatímco aplikace GeoGebra je všeobecně poměrně známa a byl jí věnován i příspěvek „Zásada názornosti v matematice s využitím programu GeoGebra“, na který tento článek navazuje, aplikace Corinth 3D již tak často využívaná není. Jedná se o placený nástroj, který je dostupný v prostředí Windows jako aplikace, na ostatních platformách (Android, iOS, iPadOS, atd. včetně již zmiňovaného operačního systému Windows) pak prostřednictvím webové aplikace. Aplikace slouží k vizualizaci různých oblastí učiva základních či středních škol. Kromě matematiky, konkrétně geometrie, zahrnuje celé spektrum školních předmětů, např. biologie, fyzika, chemie apod.

Některé animace jsou samostatně pohyblivé (např. model mandelinky bramborové se pohybuje, občas vzlétne), všechny modely pak umožňují interaktivní otáčení, a tedy změnu pohledu. V oblasti geometrie nabízí tedy vše, co umí i např. GeoGebra. Rozdíl je však v dalších funkcionalitách usnadňující vzdělávací proces i např. samostudium.



Obrázek 1. Uživatelské rozhraní aplikace Corinth 3D

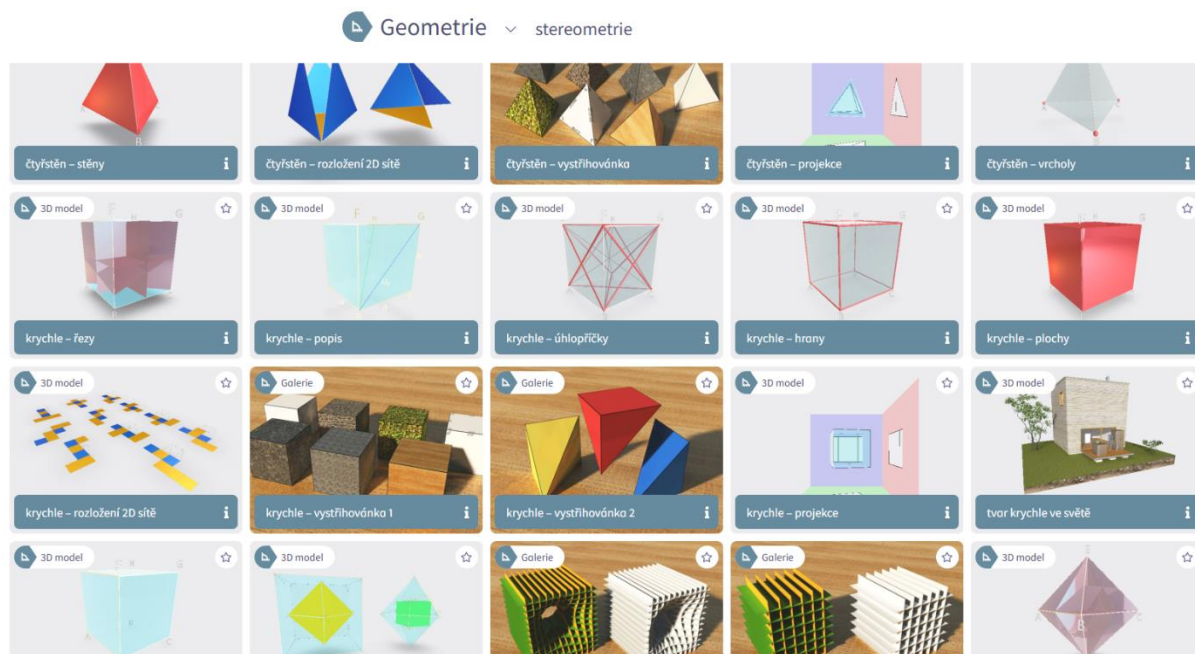


Obrázek 2. Uživatelské rozhraní aplikace Corinth 3D – oblast Geometrie

Jednotlivá specifika aplikace pro edukační proces zkusíme ilustrovat v rámci konkrétního tělesa, které patří mezi jedny ze základních v rámci stereometrie na základních školách – krychle.

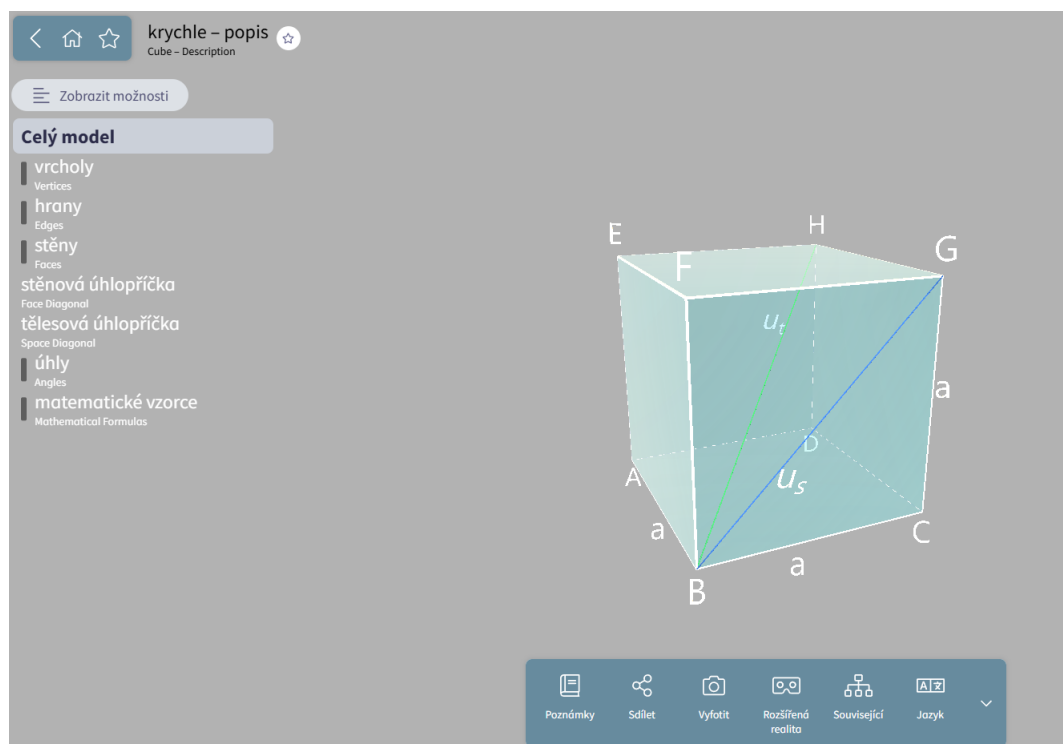
2.1. Krychle v aplikaci Corinth 3D

Krychle je v aplikaci Corinth 3D zastoupena několika animacemi, od základního zobrazení a popisu, přes zobrazení všech úhlopříček, rozkladu sítí až po projekce či vystřihovánky.



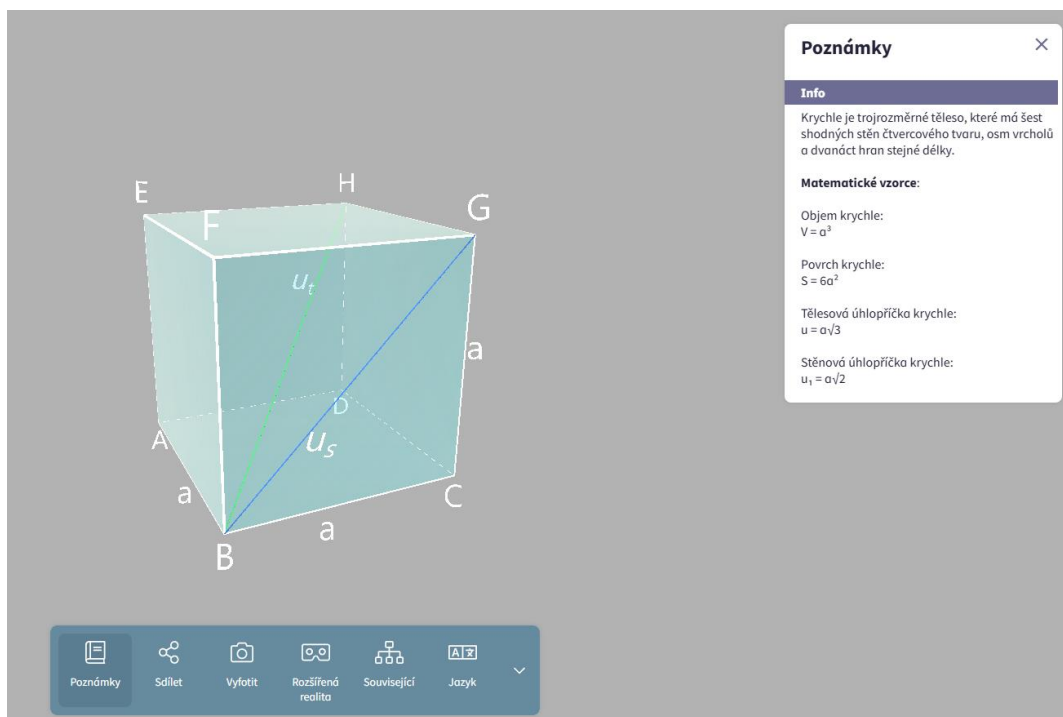
Obrázek 3. Uživatelské rozhraní aplikace Corinth 3D – vybrané oblasti stereometrie

V případě základního popisu mohou žáci vidět zobrazení krychle, jedné stěnové a jedné tělesové úhlopříčky. Co však je zajímavým zpestřením a obohacením pro výuku matematiky, je možnost zapnutí dvouzjazyčné terminologie. V případě aktivace dvou jazyků může vyučující zobrazit terminologii v mateřském jazyce žáků a některém z dalších světových jazyků. Tato integrace cizího jazyka do výuky matematiky pak směřuje nejen k využití přístupu CLIL (Content and Language Integrated Learning), ale může být využitelný i např. v případě zastoupení žáků s jiným mateřským jazykem ve třídě. V době publikování článku bylo v aplikaci dostupných 19 jazyků.



Obrázek 4. Uživatelské rozhraní aplikace Corinth 3D – popis krychle

Dále u většiny modelů lze zobrazit poznámky, které zahrnují základní informace o daném objektu, včetně základních vzorců.

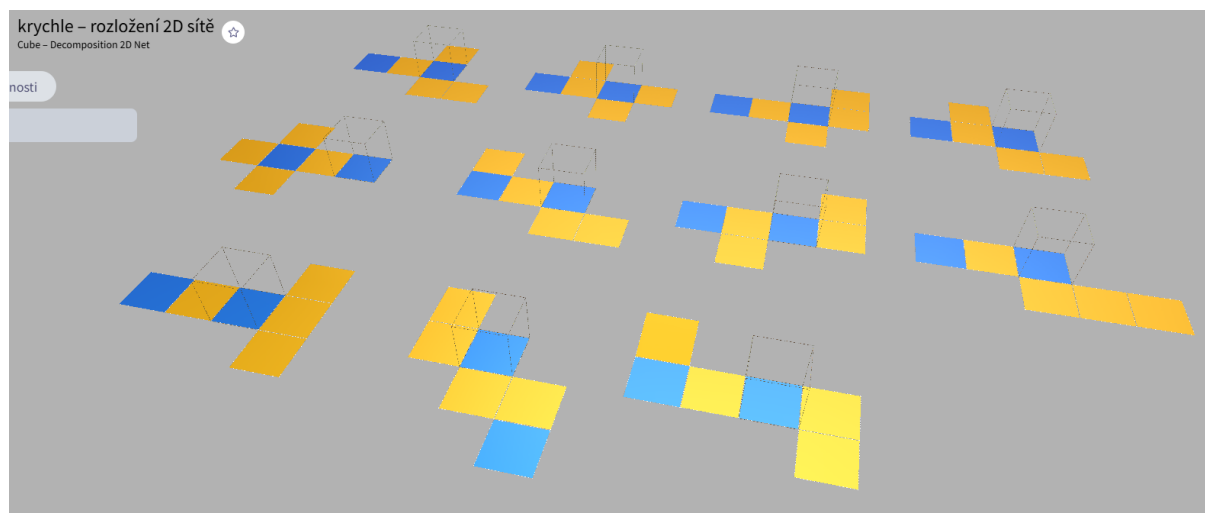


Obrázek 5. Uživatelské rozhraní aplikace Corinth 3D – zobrazení poznámek



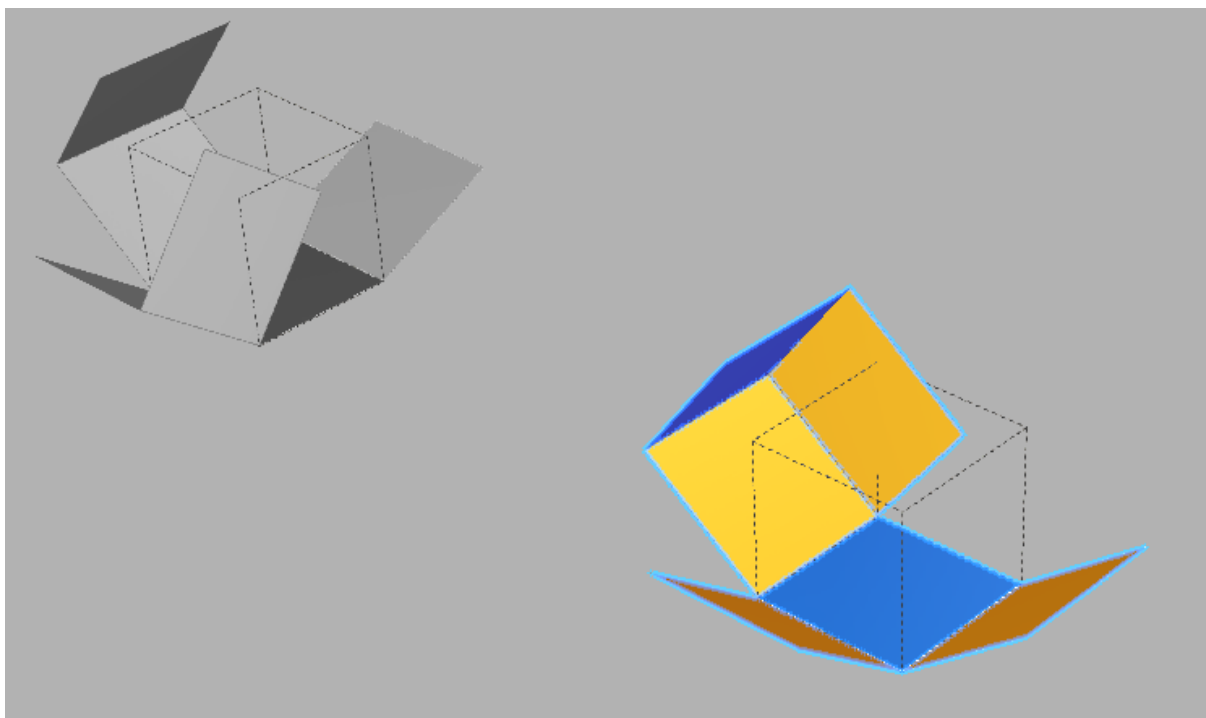
Obrázek 6. Náhled dvojjazyčné terminologie v aplikaci Corinth 3D

Další zajímavé animace nabízí síť krychle. Zatímco GeoGebra při využití funkce *sít'* zobrazí pouze jednu variantu, v aplikaci Corinth 3D je připravena animace zobrazující 11 různých zobrazení sítě krychle. Tyto síť se v pravidelných cyklech rozkládají a opět skládají, žák si je může kdykoliv pozastavit v kterékoliv fázi.

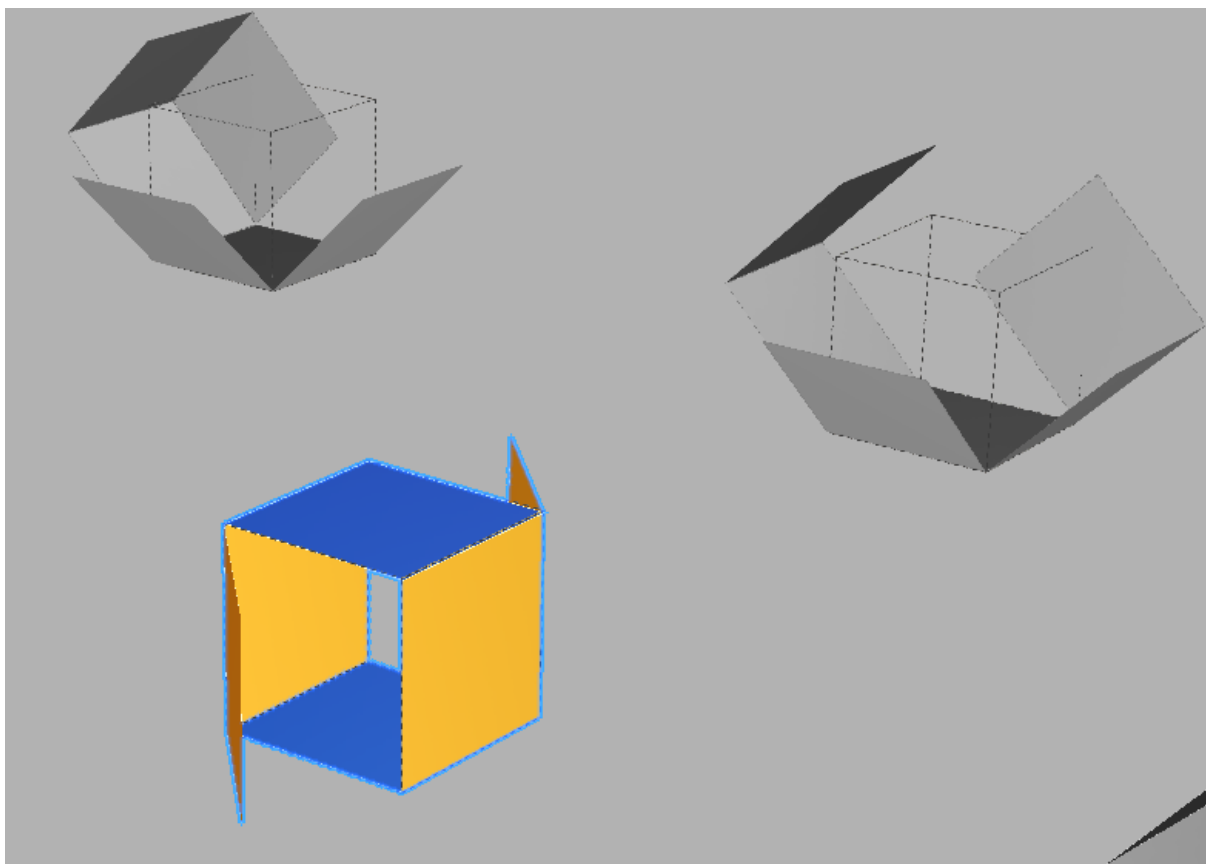


Obrázek 7. Náhled na rozložené síť krychle v aplikaci Corinth 3D

Jak je vidět na obrázcích 8 a 9, při kliknutí na jednotlivé zobrazení sítě krychle pak ostatní zešednou a přiblíží se vybraná animace.



Obrázek 8. Náhled na vybranou síť krychle v aplikaci Corinth 3D při animaci jejího skládání

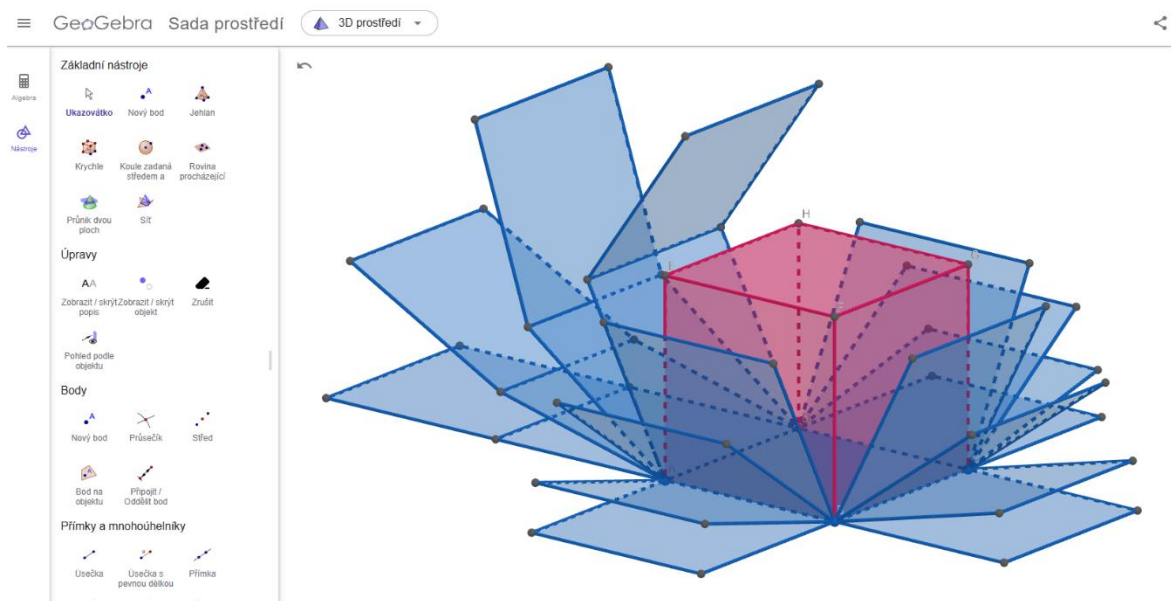


Obrázek 9. Náhled na vybranou síť krychle v aplikaci Corinth 3D při animaci jejího skládání

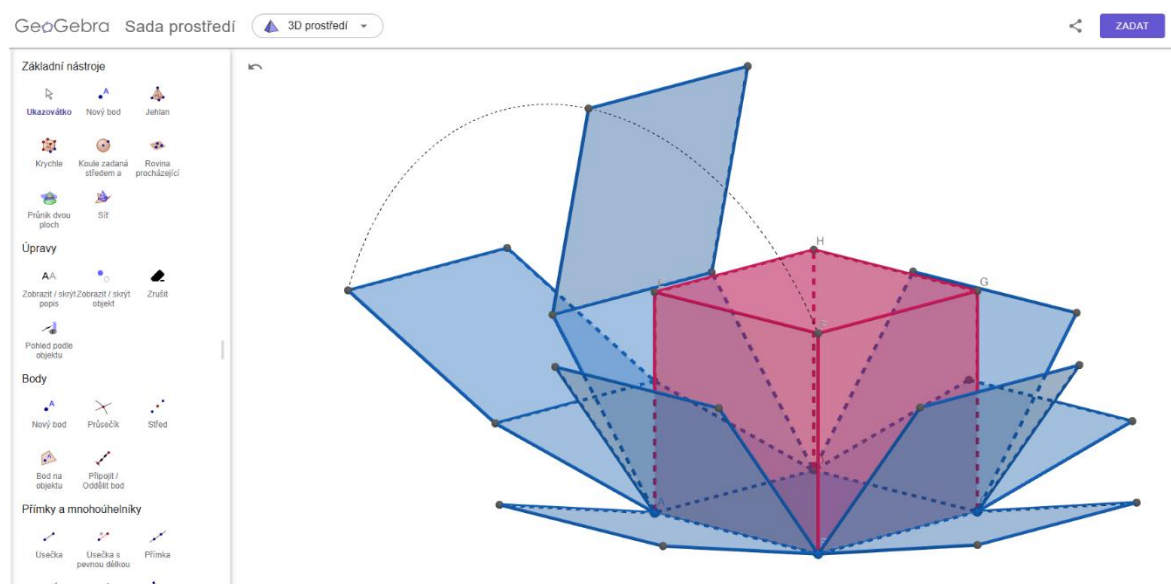
2.2. Krychle v aplikaci GeoGebra

Na první pohled by se tedy mohlo zdát, že aplikace Corinth 3D převyšuje běžně užívanou aplikaci GeoGebra. Není to však v žádném případě pravdou. Některé animace či znázornění v aplikaci Corinth 3D nejsou zcela matematicky korektní (např. animace rozkládání sítě válce či kuželu, kdy je plášť skládán z krátkých úseček). Ve prospěch GeoGebry také hovoří její cena, kdy se jedná o bezplatnou aplikaci.

Zatímco v Corinth 3D je uživatel odkázán na připravené modely, v GeoGebře si každý může vytvářet modely dle svých požadavků a preferencí. Tato možnost je ideální zejména v kontextu 3D tisku, kdy GeoGebra je schopna exportovat STL soubor, který pak lze v příslušném softwaru tiskárny zadat do tisku. GeoGebra tak nabízí mnohem širší možnosti individualizace vizualizací matematických úloh.



Obrázek 10. Uživatelské rozhraní aplikace GeoGebra – síť krychle v různých fázích skládání



Obrázek 11. Uživatelské rozhraní aplikace GeoGebra – síť krychle v různých fázích skládání s vyznačeným pohybem konkrétního vrcholu krychle

2.3. Platónská tělesa

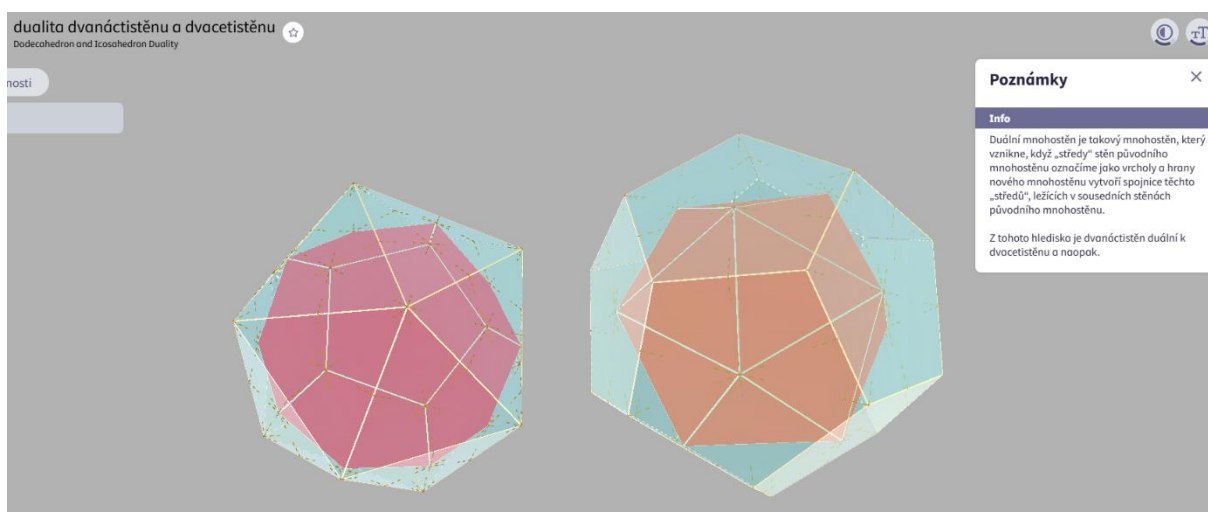
V předchozích kapitolách jsme se věnovali krychli, jakožto typickému tělesu v učivu matematiky na základní škole. Krychle, jakožto pravidelný šestistěn, patří mezi platónská tělesa. Ty bývají vymezeny jako konvexní pravidelný mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a současně z každého vrcholu vychází stejný počet hran. Kromě krychle mezi ně patří pravidelný čtyřstěn, pravidelný osmistěn, pravidelný dvanáctistěn a pravidelný dvacetistěn (Portál středoškolské matematiky, 2010). Ač tato ostatní platónská tělesa na základních školách nepatří mezi běžné učivo, pro žáky jejich představení může být velmi zajímavé. Navíc pro některé z nich mohou být tato tělesa již známá v podobě herních kostek z různých deskových her.



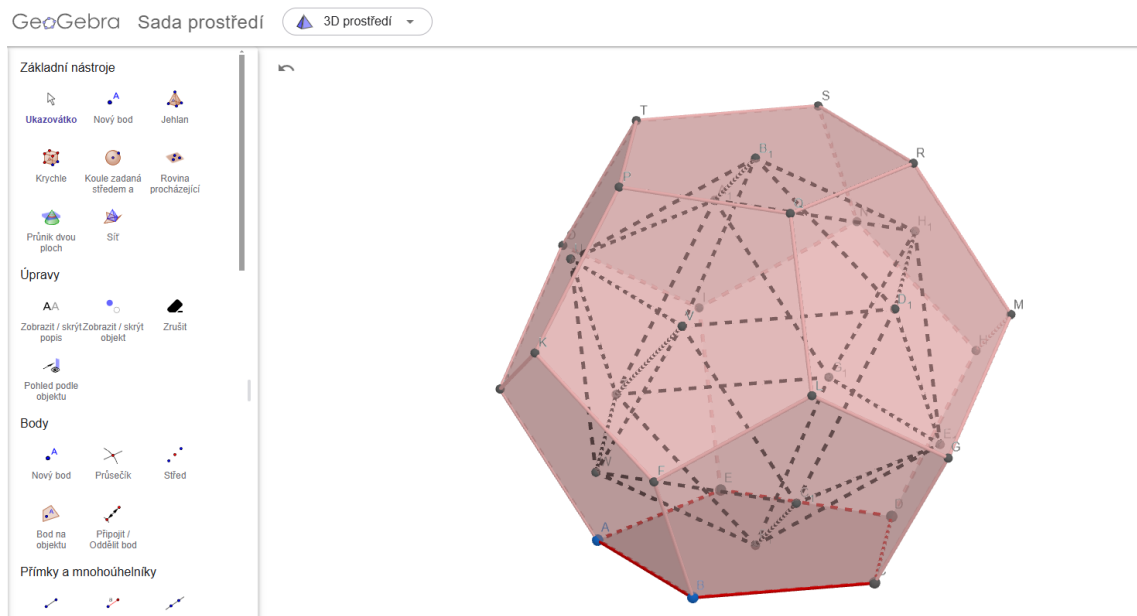
Obrázek 12. Platónská tělesa – hrací kostky

Věnovat se podrobně platónským tělesům není záměrem tohoto článku, proto si ukažme jeden konkrétní příklad využití aplikace Corinth 3D a GeoGebry.

Zajímavá situace nastane, propojíme-li středy stěn platónského tělesa. U čtyřstěnu vznikne opět čtyřstěn, propojením středů stěn krychle vznikne osmistěn a obráceně u osmistěnu krychle. Stejně tak se vzájemně doplní dvanáctistěn s dvacetistěnem. Tomuto jevu se říká dualismus. Mnohostěny, jejichž stěny a vrcholy si vzájemně odpovídají, se říká duální. (Sutton, 2023)



Obrázek 13. Zobrazení duality dvanáctistěnu a dvacetistěnu v aplikaci Corinth 3D



Obrázek 14. Zobrazení duality dvanáctistěnu a dvacetistěnu v aplikaci GeoGebra

Jak je vidět z obrázků 13 a 14, obě aplikace umí zobrazovat dualismus platónských těles. Jedná se tedy opět o další oblast, kterou mohou vyučující matematiky využít ve své pedagogické praxi.

3. Závěr

Cílem tohoto článku nebylo porovnání dvou nástrojů za účelem propagace jednoho či druhého. Dle autorů jsou oba nástroje velmi zajímavé a mají své místo ve výuce matematiky. Záleží zejména na preferencích jednotlivých vyučujících, zda budou chtít rychle využít předpřipravené modely (což umožňují v mnoha případech obě aplikace, vezmeme-li v potaz velké množství veřejně dostupných appletů GeoGebry), nebo si budou chtít „pohrát“ s vlastními modely přesně dle svých požadavků a věnovat nějaký čas jejich přípravě. Obě aplikace umožňují zobrazení modelu v rozšířené realitě, což pro mnoho žáků může být taktéž zajímavým zpestřením výuky matematiky. Cílem tedy bylo přiblížení možnosti zvýšení názornosti v pedagogické praxi a prezentace dvou moderních dostupných nástrojů.

Acknowledgements

Článek vznikl v rámci realizace projektu *Matematická gramotnost v kontextu Technology-based learning* (č. proj. IGA_PdF_2024_004) realizovaného na Katedře matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.

Literatura

- Coulon, R., Dorfsman-Hopkins, G., Harriss, E., Skrodzki, M., Stange, K., & Whitney, G. (2023). On the importance of illustration for mathematical research. *Notices of the American Mathematical Society*, 71(1), 105–115. <https://doi.org/10.1090/noti2839>
- Kalhous, Z., Obst, O. a kol. (2002). *Školní didaktika*. Portál, s.r.o., Praha.
- Univerzita Karlova. (2010). *Portál středoškolské matematiky*. <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/objemyaobsahy/?page=platon>
- Sutton, D. (2023). *Platónská a archimedovská tělesa*. Dokořán, Praha.

GRADOVANÉ SÉRIE ÚLOH VE VYSOKOŠKOLSKÉ GEOMETRII

Renáta ZEMANOVÁ¹

¹Ostravská univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)

renata.zemanova@osu.cz

Abstrakt

V rámci individualizace a diferenciací vysokoškolské výuky se věnujeme jednomu z nejčastěji používaných nástrojů na nižších stupních škol, a to gradovaným zadáním činností. Zadáním, která studentům nabídnou volbu úrovně odpovídající jejich schopnostem.

Prezentujeme práci s gradovaným testem ve vysokoškolské výuce geometrie. Sestavili jsme gradované série úloh, popsali jejich gradační parametry, nastavili parametry pro zpětnou vazbu a hodnocení. Série jsme realizovali se studenty 2.–3. ročníků oboru Učitelství pro 1. st. ZŠ, a to v prezenční i kombinované formě studia. Výsledky jsme vyhodnotili a analyzovali. Popsali jsme přínosy a rizikové faktory, navrhli další využití.

Klíčová slova: individualizace, diferenciací, vysokoškolská výuka, gradovaná zadání úloh, gradační parametry, geometrie, 1. st. ZŠ

GRADED SERIES OF PROBLEMS IN UNIVERSITY GEOMETRY

Abstract

In the frame of the individualization and differentiation of university education, we focus on one of the most frequently used tools at lower levels of schools, namely the graded assignment of activities. Assignments that offer students a choice of levels corresponding to their abilities.

The work with a graded test is presented in the university geometry teaching. We compiled the graded series of tasks, described their grading parameters, and set parameters for feedback and evaluation. We implemented the series with students from the 2nd–3rd grades years of the field of Teaching for 1st grade. Elementary school is considered in both full-time and combined forms of study. We evaluated and analyzed the results. We described the benefits and risk factors and suggested further utilization

Keywords: individualization, differentiation, university education, graded assignments, grading parameters, geometry, 1st grade of primary school

1. Úvod

Individualizace a diferenciací výuky jsou aktuálními tématy současné školy. Ve vysokoškolské přípravě studentů je využíváme především formou individuálních konzultací, naše zkušenosti však ukazují stále větší rozdíly v oblasti studijních předpokladů i matematických znalostí studentů při zahájení vysokoškolského studia. Jejich problémy se zvládáním obsahu nás vedou k hledání možností, jak bez snížení nároků na výstup a s omezenou časovou dotací jejich potřeby naplnit. Jednou z možností, je využití gradovaných zadání úloh.

Inspirovali jsme se zkušenostmi z výuky na základní škole, kde se gradované úlohy vzhledem k přechodu od transmisivní výuky ke konstruktivismu čím dál častěji. Autorka byla po několik let členkou výzkumného týmu zabývajícího se využitím gradovaných úloh ve výuce matematiky 1. stupně ZŠ (Králová a kol., 2023).

Naše téma souvisí s personalizovaným učením, přičemž neexistuje jednotná definice tohoto pojmu. Např. personalizovaným učením můžeme chápat „výuku, ve které jsou tempo učení a vyučovací přístup optimalizovány pro potřeby každého studenta...“ (Bernacki a kol., 2021; Walkington, Bernacki, 2020). Spencer rozlišuje čtyři základní formy obsahu: standardizace, diferenciaci, přizpůsobení a personalizaci. Diferencovaným obsahem myslí kromě základního obsahu další informace, který si uživatelé sami volí. Typicky jde o otázky k zamyšlení nebo o rozšiřující studijní materiály. Personalizovaným obsahem rozumí obsah přizpůsobený potřebě uživatele, resp. jeho schopnostem. Uvádí příklad rozřazujících jazykových testů a následné přesměrování na přiměřenou úroveň vzdělávání. Dalším pojem je adaptabilní učení, tedy takové, které podle opakované zpětné vazby směrem k uživateli soustavně upravuje obsah „na míru“ jeho okamžité potřebě (Spencer, 2012). Další výzkumy se věnují potenciálu ICT v procesech diferencovaného obsahu, nicméně naše studie jde jiným směrem. Pracujeme primárně s tištěnými studijními materiály (učebnicemi, pracovními listy, testovými zadáními...), proces diferenciaci řídí samotný uživatel, tedy žák nebo student.

V nepublikovaném textu (Hejný, 2015) autor vymezuje *gradovanou sérii úloh* tak, že vycházejí ze společného zadání, jsou na sobě nezávislé a statisticky vzato každá následující je obtížnější než předchozí. Didaktické jevy, jimiž se odlišuje náročnost jednotlivých úloh stejné série, označuje jako *gradační parametry*. Informace, které lze z žakovského řešení získat, nazývá *diagnostický potenciál úlohy*. Návrhy didaktických akcí, jimiž je možné na základě uskutečněné diagnostiky vylepšit nebo posílit žákův matematický orgán, pojmenovává *(re)edukační návrhy*. Čtveřici materiálů gradovaná série úloh, gradační parametry, diagnostický potenciál úlohy, *(re)edukační návrhy* pak tvoří *zpracování gradovaného typu úloh*. Gradovaná série úloh může mít mnoho úrovní, z nich je možné vybrat několik pro zadání v gradovaném testu. Ten má obvykle tři úrovně. Úroveň a) je nejlehčí a mapuje základní pochopení. Úroveň b) je středně náročná a dává informaci o tom, do jaké míry zvládá žák požadované činnosti: schopnost číst s porozuměním, dobře uchopit úlohu, odhalit řešitelskou strategii, tuto realizovat. Úroveň c) od žáka žádá požadované činnosti na vyšší úrovni. Žák, který tuto úroveň dobře zvládá, je připraven řešit i náročnější úlohy.

2. Metodologie

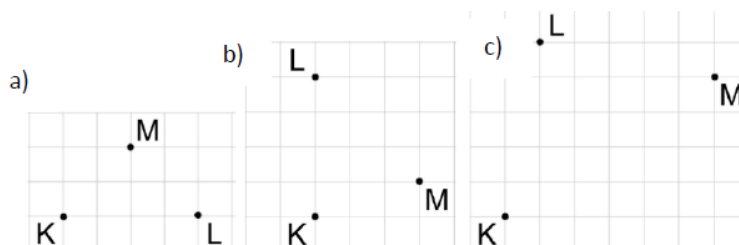
V listopadu 2023 jsme zadali 41 studentům oboru Učitelství pro 1. st. ZŠ na začátku výuky vysokoškolské geometrie diagnostický gradovaný test. Evidovali jsme typ absolvované střední školy respondentů.

Test sestával ze sedmi úloh korespondujícími s výstupem geometrie po 5. ročníku podle RVP ZV. Každá úloha diagnostikovala jiný obsah: úloha 01 – délka úsečky, úloha 02 – obsah obrazce, úloha 03 – geometrická konstrukce ve čtvercové mříži, úloha 04 – geometrická konstrukce mimo čtvercovou mříž, úloha 05 – tělesa a jejich sítě, úloha 06 – stavby z krychlí, úloha 07 – osová a středová souměrnost.

Úlohy 1–6 jsme vybrali z publikace Diferenciaci výuky (Králová a kol., 2023), na které se autor článku podílel, úloha 7 je ze zadání jednotné přijímací zkoušky z matematiky na šestileté obory v roce 2021, 2. náhradní termín (Cermat, 2021).

2.1. Úloha 1 – délka úsečky

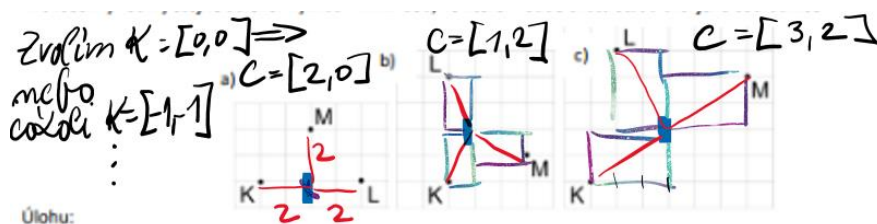
Zadání: Rodiny Kolářových, Lounských a malých si chtějí koupit společnou chatu. Dohodli se, že chatu budou mít obě rodiny stejně daleko. Vyznač v mříži bod, ve kterém chata bude stát a urči jeho souřadnice.



Obrázek 1. Úloha 1, zadání

Předpokládané strategie řešení: Předpokládali jsme, že studenti využijí v úrovni a) čtvercové mříže, v úrovních b) a c) kromě čtvercové mříže vlastnosti úhlopříček obdélníka. Gradačním parametrem odlišujícím úroveň b) a c) je umístění a vzdálenost vrcholů těchto obdélníků.

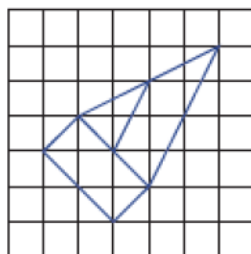
Řešení:



Obrázek 2. Úloha 1, řešení

2.2. Úloha 2 – obsah obrazce

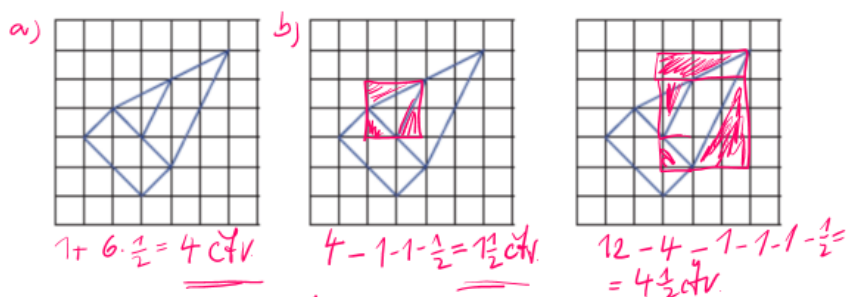
Zadání: Zjisti obsah a) obdélníku, b) největšího trojúhelníku, c) lichoběžníku.



Obrázek 3. Úloha 2, zadání

Předpokládané strategie řešení: Předpokládali jsme, že studenti využijí v úrovni a) prosté počítání polovin čtverců (pohledem), v úrovni b) a c) rámování. Gradačním parametrem odlišujícím úroveň b) a c) je složitost rámu (úloha c se rámuje postupně).

Předpokládané strategie řešení: Předpokládali jsme, že studenti budou počítat ve čtvercích. Využijí v úrovni a) prosté sečtení čtverců a jejich částí (polovin, když strana obdélníka je zároveň úhlopříčkou čtverce mříže), v úrovni b) a c) rámování (když od obsahu čtvercového/obdélníkového rámu odečtou obsahy částí, jež nepatří trojúhelníku/lichoběžníku).

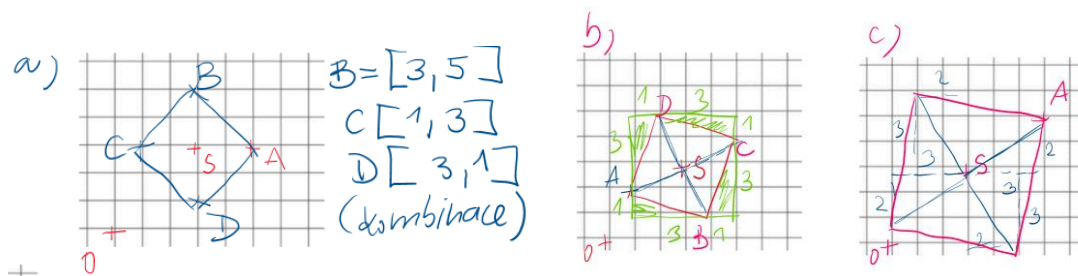


Obrázek 4. Úloha 2, řešení

2.3. Úloha 3 – konstrukce v mříži

Zadání: Známe střed $S(3, 3)$ čtverce $ABCD$ a vrchol A . Narýsuj čtverec a vrcholy B, C, D popiš souřadnicemi. Patří bod S čtverci $ABCD$? a) $A(5, 3)$, b) $A(1, 2)$, c) $A(6, 5)$, studenti měli k dispozici čtvercovou mříž.

Předpokládané strategie řešení: Předpokládali jsme, že studenti využijí v úrovni a) vlastnosti úhlopříček čtverce, v úrovni b) a c) vlastnosti úhlopříček čtverce, dopočítávání poměrů, na které rozdělí vrcholy čtverce jeho rám (b) $3 : 1$, c) $5 : 1$), příp. c) dopočítávání souřadnic vrcholů čtverce vzhledem k jeho středu). Gradačním parametrem je poloha a velikost čtverce.



Obrázek 5. Úloha 3, řešení

2.4. Úloha 4 – konstrukce mimo mříž

Zadání: Postupuj podle slovního popisu, postup zapiš symbolicky.

- a) Narýsuj libovolný trojúhelník ABC .
 Sestroj kružnici k se středem A a poloměrem r menším než je strana AB i AC .
 Průsečík kružnice k se stranou AB označ P a se stranou AC označ R .
 Sestroj kružnici m se středem v P a poloměrem r .
 Sestroj kružnici n se středem v R a poloměrem r .
 Zvol jeden průsečík kružnic m, n a označ jej Q .
 Body A, Q veď přímku o .
- b) Narýsuj kružnici k se středem S a poloměrem $r = 34 \text{ mm}$.
 Bodem S veď dvě na sebe kolmé přímky p a q .
 Jeden z průsečíků kružnice k a přímky p označ A a druhý M .
 Jeden z průsečíků kružnice k a přímky q označ Q .
 Sestroj střed úsečky AS a označ jej P .
 Na úsečce SM sestroj bod R tak, že $|PR| = |PQ|$.
 Na kružnici k sestroj různé body B, C, D a E tak, že $|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |QR|$.

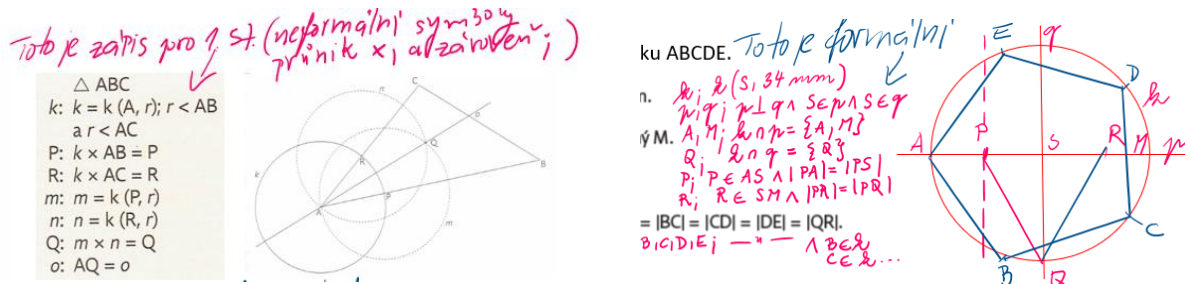
Obrázek 6. Úloha 4, zadání

Předpokládané strategie řešení: Zde jsme očekávali postup podle slovního popisu a symbolický zápis postupu.

Řešení:

a) neformální zápis odpovídající 1. st. ZŠ

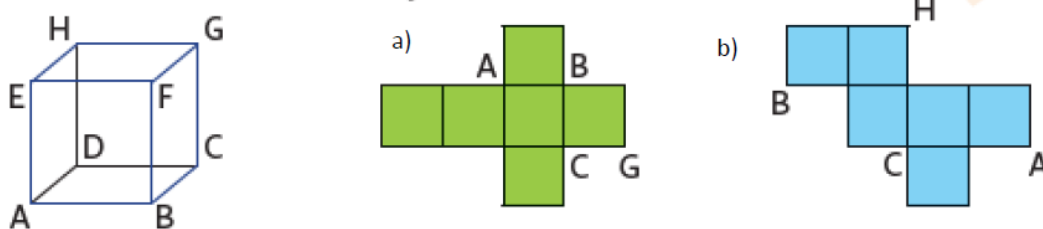
b) formální geometrický zápis



Obrázek 7. Úloha 4, řešení

2.5. Úloha 5 – tělesa a jejich sítě

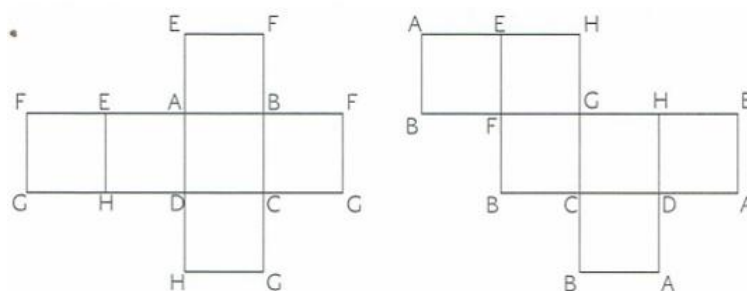
Zadání: Dopln do sítě krychle názvy scházejících vrcholů.



Obrázek 8. Úloha 5, zadání

Předpokládané strategie řešení: Předpokládali jsme, že studenti nebudou potřebovat model krychle. Budou využívat svých zkušeností s prací v trojrozměrném prostoru, budou schopni si síť krychle „složit“ podle potřeby. Gradačním parametrem je poloha polymin sítě.

Řešení:



Obrázek 9. Úloha 5, řešení

2.6. Úloha 6 – stavby z krychlí

Zadání: Hnědou stavbu postavenou ze tří shodných krychlí vidíme zepředu jako tři čtverce. Zakresli, jak vidíme stavbu zepředu, shora a zprava.



Obrázek 10. Úloha 6, zadání

Předpokládané strategie řešení: Předpokládali jsme, že studenti nebudou potřebovat model krychlové stavby. Budou využívat svých zkušeností s prací v trojrozměrném prostoru, budou schopni „vidět“ sdružené průměty. Gradačním parametrem je poloha krychlí ve stavbě.

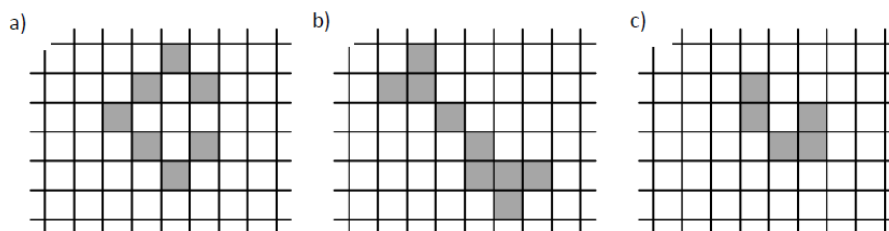
Řešení: Postupně pohled zepředu, shora a zprava



Obrázek 11. Úloha 6, řešení

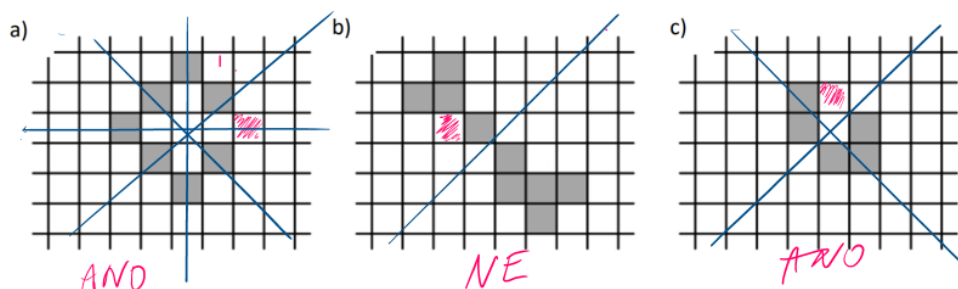
2.7. Úloha 7 – osová a středová souměrnost

Zadání: Ve čtvercové síti je z tmavých čtverců složen útvar. K tomuto útvaru doplň právě jeden tmavý čtverec tak, aby byl útvar osově souměrný a měl co nejvíce různých os souměrnosti (sestrojených svisle, vodorovně nebo šikmo). Všechny osy sestroj a pojmenuj. Je obrazec středově souměrný?



Obrázek 12. Úloha 7, zadání

Řešení:



Obrázek 13. Úloha 7, řešení

3. Analýza studentských řešení

U každého studenta jsme zaznamenali správnost řešení (ano, ne, částečně – identifikujeme, co ano a co ne), použitou strategii a její analýzu, shrnutí pro reedukaci. Rozhovorem jsme pak zjistili některé příčiny analyzovaných jevů. Ilustrujeme pracovní záznam na úloze 1, student 01:

SPŠCh, Řeší úrovně: a, b, c

a) správnost řešení – NE

strategie – průsečík těžnic, těžiště – předpokládá, že trojúhelník je rovnostranný, a tedy těžnice jsou shodné (není a nejsou) nebo vidí, že trojúhelník je rovnoramenný, ale domnívá se, že i tady jsou těžnice shodné nebo shodnost těžnic neřeší, „nějak to vyšlo přibližně stejně“.

b) správnost řešení – ČÁSTEČNĚ, nenajde souřadnice

strategie – průsečík os stran (střed kružnice opsané), nevíme, zda si uvědomuje, že se jedná o tuto kružnici nebo sestrojila náhodně

c) správnost řešení – NE

strategie řešení – průsečík os stran, sestrojen správně, ale nepovažuje ho za řešení a za řešení považuje střed jedné střední příčky.

Shrnutí pro reedukaci – nepoužívá délky úhlopříček, používá spíše náhodně: střed kružnice opsané (průsečík os stran), souřadnice nenajde.

Rozhovor – nenapadlo ho, že by mohl porovnat úhlopříčky obdélníků a čtverců (v úloze je neviděl) přesto, že si jejich shodnost uvědomuje, osy stran zkusil sestrojit bez uvědomění si významu pro řešení úlohy, řešení jen zkusil nějak „od oka“ s využitím „nějakých geometrických znalostí“. Souřadnice neuměl určit, když v mříži nejsou znázorněny osy, zvolit si vlastní ho nenapadlo.

Záznamy jsme shrnuli do tabulky, kde ve svislém záhlaví identifikujeme studenta a ve vodorovném pro každou úlohu přehled řešení v úrovních a–c, počet získaných bodů. Pro ilustraci uvádíme část tabulky pro úlohu 1, tabulka 1. Z tabulky je zřejmé, že 16 studentů, a to 04–07, 09, 10, 16–19, 22, 24, 27–29, 37–38 úlohu nevyřešilo na žádném gradačním stupni (0 bodů), 12 studentů, a to 02, 03, 08, 11, 12, 21, 23, 30, 32, 33, 35, 37, 40 úlohu vyřešilo na nejvyšším gradačním stupni (6 bodů). Z těchto 12 studentů 6, a to 21, 23, 30, 33, 37, 40 řešilo všechny úrovně a–c. 2 studenti, a to 14 a 41, vyřešili správně jen úroveň a, 1 student, a to 13 jen úroveň b. Velká část studentů správně určila bod v mříži, ale ne jeho souřadnice (studenti 15, 20 na všech úrovních, studenti 01, 18, 25, 26, 31, 39 alespoň na jedné úrovni). Průměrně dosáhli studenti v této úloze 2,37 bodů.

Užitím analýzy navrhujeme pro reedukaci věnovat pozornost využití vlastností úhlopříček obdélníků a čtverců (ověřili jsme, že studenti sice vědí, že shodné obrazce mají shodné úhlopříčky, ale neumí tuto vlastnost využít v řešení úloh o délce úsečky), souřadnicím bodů v kartézské soustavě, práci ve čtvercové mříži a proaktivnímu přístupu v řešení úloh (volba kartézské soustavy).

Tabulka 1. Výsledky úlohy 1

student	Úloha 1 – délka úsečky						
	a - 2 body		b - 4 body		c - 6 bodů		celkem
	najde bod	určí souřadnice	najde bod	určí souřadnice	najde bod	určí souřadnice	
01	0	0	2	0	0	0	2
02	0	0	0	0	3	3	6
03	0	0	0	0	3	3	6
04	0	0	0	0	0	0	0
05	0	0	0	0	0	0	0
06	0	0	0	0	0	0	0
07	0	0	0	0	0	0	0
08	0	0	0	0	3	3	6
09	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	3	3	6
12	0	0	2	2	3	3	6
13	0	0	2	2	0	0	4
14	1	1	0	0	0	0	2
15	1	0	2	0	3	0	3
16	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0
18	1	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0
20	1	0	2	0	3	0	3
21	1	1	2	2	3	3	6
22	0	0	0	0	0	0	0
23	1	1	2	2	3	3	6
24	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	3	0	3
26	1	0	2	0	0	0	2
27	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0
30	1	1	2	2	3	3	6
31	0	0	2	0	0	0	2
32	0	0	0	0	3	3	6
33	1	1	2	2	3	3	6
34	0	0	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	3	3	6
36	1	0	0	0	0	0	1
37	1	1	2	2	3	3	6
38	0	0	0	0	0	0	0
39	1	0	0	0	0	0	1
40	1	1	2	2	3	3	6
41	1	1	0	0	0	0	2
celkem	14,00	8,00	26,00	16,00	48,00	39,00	97,00
průměr							2,37

Stejně jsme zpracovali výsledky všech dalších úloh. Jejich komparací jsme zjišťovali další parametry, a to obtížnost jednotlivých úloh (průměrný počet získaných bodů, tabulka 2) a úroveň jednotlivých studentů a vztah mezi úspěšností studenta a typem absolvované střední školy, přičemž si uvědomujeme, že tyto výsledky nelze pro malý počet respondentů zobecnit (tabulka 3).

V tabulce 2 uvádíme průměrný počet získaných bodů. Nejobtížnější byla pro studenty úloha 3 konstrukce v mříži, kde dosáhli průměrně jen 0,33 bodů, pak úloha 2 (obsah obrazce), kde dosáhli průměrně 0,51 bodů. Naopak nejúspěšnější byli v úloze 6 (osová a středová souměrnost) s průměrem 3,71 bodů a úloha 1 (délka úsečky) s průměrem 2,37 bodů. Průměrný bodový zisk ostatních úloh se pohyboval mezi 1 a 2 body. Analýza by zde mohla pokračovat porovnáním úrovní, které studenti řešili a jejich úspěšností na jednotlivých úrovních.

Tabulka 2. Průměrný bodový zisk v úlohách 1–7

	úloha 1 – délka úsečky	úloha 2 – obsah čtverce	úloha 3 – rýsování čtverce v mříži	úloha 4 – konstrukce mimo mříž	úloha 5 – sítě krychle	úloha 6 – sdružené průměty	úloha 7 – souměrnosti
celkem	97	21,00	13,33	72,5	71,00	152,00	78,00
průměr	2,37	0,51	0,33	1,77	1,73	3,71	1,90

V tabulce 3 uvádíme celkové výsledky jednotlivých studentů v absolutním čísle a procentech, používáme zkratky SPŠ – střední průmyslová škola, GYM – gymnázium, SPgŠ – střední pedagogická škola, SOŠ – střední odborná škola, SOU – střední odborné učiliště, OA – obchodní akademie. Studenty jsme podle výsledků seřadili od nejvyššího po nejnižší počet bodů. Vidíme, že nejlepšího výsledku dosáhl student 21, absolvent střední průmyslové školy, následují absolventi 03, 11, 10 gymnázia, absolvent 25 střední průmyslové školy, absolventi 14 a 23 gymnázia. Do první desítky ještě patří absolventi střední pedagogické školy 40 a 30 a absolvent 02 středního odborného učiliště. Na posledních třech místech se umístili absolventi 18 (gymnázium), 17 (střední odborná škola) a 04 (obchodní akademie) s 1,5 bodů ze 42 možných.

Tyto výsledky nelze jednoznačně interpretovat, neznáme typ střední odborné školy, středního odborného učiliště apod., vzorek respondentů je malý. Nicméně vidíme lepší výsledky absolventů průmyslových škol, odborných škol a učilišť s technickým zaměřením. Gymnázia vykazují zcela nepředvídatelný rozptyl úrovně absolventů, což koresponduje s přetrvávající konzervativní výukou geometrie výrazně orientovanou jen na algoritmické geometrické konstrukce a výpočty.

Tabulka 3. Celkový bodový zisk studentů 01– 41

	student		CELKEM		škola
			max. 42	%	
1	21	C23205	27,3	65	SPŠ
2	03	C23194	22,0	52	GYM
3	11	C23198	22,0	52	GYM
4	10	C23191	21,0	50	GYM
5	25	C23461	20,3	48	SPŠ
6	14	C23204	20,0	48	GYM
7	23	C23459	19,8	47	GYM
8	40	C23458	19,5	46	SPgŠ
9	30	C23184	19,3	46	SPgŠ
10	02	C23203	19,0	45	SOŠ
11	33	C23465	18,5	44	GYM
12	35	C23180	17,5	42	SOŠ
13	06	C23209	17,3	41	GYM
14	08	C23191	16,5	39	GYM
15	12	C23164	16,5	39	GYM
16	26	C23175	15,5	37	SPgŠ
17	20	C23200	15,2	36	SPgŠ
18	32	C23187	15,0	36	GYM
19	15	C23206	13,5	32	GYM
20	38	C23467	13,5	32	GYM

	student		CELKEM		škola
21	24	C23460	13,0	31	GYM
22	13	C23183	12,5	30	SOŠ
23	28	C23472	11,8	28	SOU
24	31	C23176	10,5	25	SOŠ
25	36	C22368	10,0	24	SPgŠ
26	16	C23193	9,0	21	SOŠ
27	29	C23182	8,5	20	SPgŠ
28	34	C23208	8,5	20	GYM
29	41	C23173	8,5	20	GYM
30	27	C23177	7,5	18	GYM
31	09	C23178	6,0	14	GYM
32	01	C23201	5,5	13	SOŠ
33	05	C23166	5,5	13	GYM
34	07	C23473	3,7	9	SOŠ
35	37	C23188	3,5	8	SOŠ
36	22	C23211	3,0	7	SPgŠ
37	19	C23190	2,0	5	GYM
38	39	C23475	2,0	5	OA
39	04	C23474	1,5	4	OA
40	17	C23171	1,5	4	SOŠ
41	18	C23165	1,5	4	GYM

4. Shrnutí pro reedukaci

Pro reedukaci jsme shromáždili tyto poznatky: Úloha 1 (délka úsečky) viz výše.

Úloha 2 (obsah obrazce) – studentům činí problém volba jednotky obsahu. Převažuje potřeba vyjádřit obsah vždy v cm^2 přesto, že výpočet je poměrně náročný a velká část studentů ho nezvládla. Převažovala chybná strategie, kdy studenti předpokládali, že čtverec mříže má obsah 1cm^2 , určili počet čtverců mříže v obrazci správně, ale dopsali, že se jedná o stejný počet cm^2 . V další strategii studenti změřili délky úseček figurujících ve vzorcích pro obsah (obdélník, trojúhelník, lichoběžník) a dosadili do vzorců, které si ne vždy dobře pamatovali. Někteří studenti změřili délku strany čtverce mříže, vypočítali jeho obsah, určili počet čtverců mříže v obrazci a vynásobili jeho obsahem. Obě strategie jsou správné, nicméně pro úlohu méně efektivní. Část studentů byla zadáním tak překvapena, že se o řešení ani nepokusili.

Úloha 3 (konstrukce v mříži) – studentům činí problém nevodorovná poloha rovnoběžníků, konkrétně čtverce. Efektivní strategii zarámování čtverce do vodorovného rámu a poměr umístění vrcholů čtverce na stranách rámu volila jen malá část. Nicméně jen minimálně studenti využívali další možnou strategii, a to využití vlastností úhlopříček čtverce. Když už si na ně vzpomněli, nevěděli, jak je v úloze použít. Často chybně sestrojili „od oka“ čtyřúhelník, který neměl shodné strany a všechny vnitřní úhly pravé (buď to nekontrolovali nebo vlastnost nevyužili). Studenti měli formální znalosti pojmu čtverec, úhlopříčka čtverce a vlastnosti úhlopříček čtverce (byli schopni vymezit teoreticky správně, ale v úloze použili totéž chybně).

Úloha 4 (konstrukce mimo mříž) – studenti většinou zvládli podle slovního popisu správně rýsovat. V symbolickém zápisu konstrukce se objevovaly chyby, a to od použití nesprávných symbolů až po zcela chybný postup (vynechání částí postupu, nadbytečné části postupu, nedodržení formálního zápisu „co konstruuji; jak to konstruuji“).

Úloha 5 (sítě krychle) – většina studentů neměla uloženou představu sítí krychle a neuměla s ní bez použití modelu manipulovat. Úlohu neřešili nebo pojmenovali jen některé „jednodušší“ vrcholy, tedy takové, jejichž transformaci si ještě zvládli představit. Měli pocit, že podobnou aktivitu dělají poprvé. Jediný student z této skupiny si síť vystříhl, složil model krychle a s jeho pomocí vrcholy popsal správně. Nepředpokládali jsme tento postup, nicméně ho považujeme za ukázkou kritického myšlení a proaktivního postupu nejen v geometrii.

Úloha 6 (stavby z krychlí) – příčinou chybných zobrazení byly nedostatečně uloženy prostorové transformace mentální struktury schémat prostorové geometrie. Usuzujeme i z toho, že chybující studenti pohled shora a zepředu zvládli, ale zaměňovali směry při pohledu zprava. Potřebovali by pro řešení úlohy model (který neměli), práci s prostorovými modely se věnovali v předchozím studiu nedostatečně nebo vůbec.

Úloha 7 (osová a středová souměrnost) – opakovaně se objevuje potíže studentů s nevodorovnými osami. Tito řeší úlohu ve vodorovné variantě správně, v nevodorovné chybně. Studenti nechápou souvislosti mezi osovou a středovou souměrností, tedy že složením dvou osových souměrností, jejichž osy jsou kolmé, je středová souměrnost se středem v průsečíku os. To vidíme v případech řešení, kdy student najde dvě kolmé osy souměrnosti a současně tvrdí, že obrazec není středově souměrný a naopak, kdy student tvrdí, že obrazec je středově souměrný, ale osy kolmé nemá. Studenti správně doplní scházející části útvaru, ale nevyznačují osy a nerozhodnou o středové souměrnosti. Nevíme, zda zapomněli či neuměli.

5. Závěr

V dalším výzkumu plánujeme zvýšit počet respondentů, jednoznačně identifikovat typ střední školy, upravit zadání úloh tak, abychom rozlišili případy, kdy student část řešení zapomněl uvést od případů, kdy řešit neuměl. V úloze 2 (obsah obrazce) diskutujeme, zda v zadání uvést volbu jednotky či nikoli. Pokud jednotky nejsou uvedeny jako v současném zadání, podaří se nám ověřit, zda student pojmu „obsah“ dobře rozumí. Tedy zda chápe, že si má zvolit jednotku obsahu (čtverec, trojúhelník, pravidelný šestiúhelník, cm^2 ...) a zjistit, „kolik jednotkových obrazců zadaný obrazec pokryje“. Pokud jednotku zvolíme v zadání, může úloha směřovat k formálnímu výpočtu užitím vzorce.

Tento gradovaný test využíváme ve výuce didaktiky geometrie pro budoucí učitele 1. st. ZŠ, kdy studenti analyzují zadání s ohledem na gradační parametry, diskutují diagnostický potenciál úloh a navrhuji reedukaci. Následně sestavují a analyzují vlastní gradovaný test a jeho žakovská řešení pro vybraný ročník, jenž navštěvují během profesní praxe.

Schopnost diferenciovat výuku považujeme za jedno z nejobtížnějších témat oborové didaktiky matematiky, obzvláště v situaci, kdy v naší republice nemáme dostatek ucelených učebních materiálů, které gradovaná zadání a vůbec konstruktivistickou výuku předpokládají. Usilujeme, aby studenti byli schopni gradovaná zadání sami nejen připravit, ale i využívat jejich řešení pro další pedagogickou práci. Aby chápali, že zápisem hodnocení jejich práce na úloze nekončí.

Acknowledgements

Tento článek vznikl za finanční podpory Evropské unie v rámci projektu REFRESH – Research Excellence For REgion Sustainability and High-tech Industries, reg. č. CZ.10.03.01/00/22_003/0000048, prostřednictvím Operačního programu Spravedlivá transformace.

Literatura

- Bernacki, M. L., Greene, M. J., & Lobczowski, N. G. (2021). A Systematic Review of Research on Personalized Learning: Personalized by Whom, to What, How, and for What Purpose(s)?. *Educational Psychology Review*, 33, 1675–1715. <https://doi.org/10.1007/s10648-021-09615-8>
- Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika I. stupně*. PdF UK, Praha.
- Králová, M., Kolandová, I., Zemanová, R., Ročák, Š., & Strnad, V. (2023). *Diferenciace výuky: rozvoj dovedností pedagogické diagnostiky ve výuce matematiky opřený o systematické využití gradovaných úloh z prostředí Hejného metody. Baterie gradovaných úloh*. https://www.h-mat.cz/sites/default/files/kestazeni/Hmat_BATERIE_GRADACE_FINAL.pdf.
- Spencer, J. 4 Stages of Personalization (Music Metaphors Included). (2011). [cit. 2012-2-28]. *Cooperative Catalyst*. <http://coopcatalyst.wordpress.com/2011/11/22/4-stages-of-personalization-music-metaphors-included/>
- Walkington, C., & Bernacki, M. L. (2020). Appraising research on personalized learning: Definitions, theoretical alignment, advancements, and future directions. *Journal of Research on Technology in Education*, 52(3), 235–252. <https://doi.org/10.1080/15391523.2020.1747757>

ELEMENTARY MATHEMATICS EDUCATION JOURNAL

Editorial Office: Palacký University Olomouc

Faculty of Education

Department of Mathematics

Address: Žižkovo nám. 5, 77900 Olomouc, Czech Republic

Phone: +420 58 563 5709

E-mail: emej@upol.cz

Electronic edition: <http://emejournal.upol.cz/issues>

2024

Vol. 6, No. 2

ISSN 2694-8133