

ČÍSELNÉ TROJÚHELNÍKY: POHLED BUDOUCÍCH UČITELŮ NA NETRADIČNÍ ÚLOHY

Eva NOVÁKOVÁ¹, Růžena BLAŽKOVÁ²

¹Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)

²Německé zemské gymnasium, základní škola a mateřská škola (Česká republika)

novakova@ped.muni.cz, blazkova@skolskykomplex.cz

Abstrakt

Príspevek je zaměřený na prezentaci zkušeností, získaných při reflektivní výuce v seminářích z didaktiky matematiky na Pedagogické fakultě MU v Brně. Předmětem našeho zájmu bylo posouzení přístupu budoucích učitelů pro 1. stupeň základní školy k řešení netradičních úloh – číselných trojúhelníků. Ukázalo se, že strategie řešení, použité studenty, byly značně rozdílné: od postupů na úrovni žáků (pokus a omyl) až k pokusům o řešení, využívající sofistikovanější postupy a znalosti osvojené v předchozím matematickém vzdělávání. Společnou reflexi studentských přístupů k řešení a kvalifikovaného posouzení žákovských řešení dokumentovaných videozáznamem považujeme za vhodný podnět k postupnému vytváření jedné stránky profesní identity učitele.

Klíčová slova: reflexe, reflektivní výuka, videozáznam, číselné trojúhelníky, strategie řešení

NUMBER TRIANGLES: A VIEW OF PROSPECTIVE TEACHERS FOR NON-TRADITIONAL TASKS

Abstract

The article presents experience obtained through reflective teaching during the didactics of mathematics' seminars at the Faculty of Education of the Masaryk University in Brno. The authors focused on assessment of the prospective primary school teachers' approach to the solution of non-traditional tasks - number triangles. It has been found out that the solution strategies of students vary significantly, from typical pupils' strategies (trial and error) to solution attempts using more sophisticated elements and knowledge acquired in course of previous mathematical education. The authors consider common reflexion of the students' solution approaches and qualified assessment of pupils' solutions documented by video recording an appropriate impulse for gradual creation of this aspect of the professional identity of the teacher.

Keywords: reflection, reflective teaching, video recording, number triangles, solving strategies

1. Úvod

Matematická a didaktická složka zaujímají v přípravném vzdělávání učitelů pro 1. stupeň základních škol významné postavení, které je odrazem významu a smyslu matematického vzdělávání žáků. Při hledání cest, jak změnit akademický přístup založený pouze na osvojování teoretických poznatků studentů, se v posledních desetiletích prosazuje model reflektivní praxe jako specifického klinického pojetí profesního vzdělávání. V pojetí reflexe, které vychází z konstruktivistické epistemologie (Svojanovský, 2016), je osvojování znalostí zpravidla

spojeno s reflexí praktické zkušenosti v reálném prostředí školské výuky (Korthagen & Vasalos, 2005; Janík et al. 2013). Učitel jako reflektivní praktik jedná aktivně, samostatně, tvořivě a odpovědně v komplexních pedagogických situacích na základě dostatečně hlubokého a širokého poznání edukačních jevů a souvislostí, svých zkušeností, kritické reflexe a sebereflexe. Reflektování předchozí zkušenosti pomáhá učiteli vyhodnocovat efekty vlastních přístupů a objevovat nové cesty, jak přistupovat ke vzdělávání konkrétních dětí, jak s nimi komunikovat s úspěchem a efektivně (Syslová et al., 2018).

2. Teoretický základ

2.1. Reflektivní přístup ve výuce didaktiky matematiky

Reflexi můžeme vymezit jako „proces učení se prostřednictvím zkušeností a ze zkušeností s cílem získání nového porozumění sobě samému a/nebo praxi“ (Píšová et al., 2011, s. 43). Učení ze zkušenosti chápeme jako celostní učení, které zahrnuje jak kognitivní aspekt (myšlení), tak aspekt konativní (jednání) a afektivní (prožívání), jež jsou vzájemně provázány. Diskuse o reflektivně pojatém přípravném vzdělávání učitelů a jeho efektivitě vedly k formulaci nových koncepcí jak na národní (Nezvalová, 2000; Píšová, 2005; Spilková et al., 2015; Švec, 2005), tak mezinárodní úrovni (Korthagen et al., 2011; Kosová & Tomengová et al., 2015; Pollard et al., 2006). V našem pojetí vnímáme uvedený koncept vzdělávání učitelů v souladu s Tomkovou (2018) jako obrat ke studentovi, který mu umožňuje rozvoj celé jeho osobnosti. Hošpesová a Tichá (2007, s. 52) zdůrazňují důležitost reflexe také v přípravě učitelů matematiky. Uvádějí, že reflexe „je klíčovým prvkem v profesním rozvoji studentů učitelství i učitelů působících v praxi. Systematické provádění kvalifikované reflexe jim umožní hlubší pohled na vlastní práci.“

Tento způsob přípravy učitelů rozvíjí také jejich poznatkovou bázi, která je považována za „klíčový aspekt cesty k učitelskému profesionalismu“ (Píšová et al., 2011, s. 53). Janík (2009, s. 15) přijímá Shulmanův (1987) koncept poznatkové báze učitelství (knowledge base for teaching), který vymezuje jako „kodifikovaný nebo kodifikovatelný agregát poznatků, dovedností, porozumění a technologií, etiky a dispozic, kolektivní zodpovědnosti – a současně způsobů, jak je reprezentovat a komunikovat“.

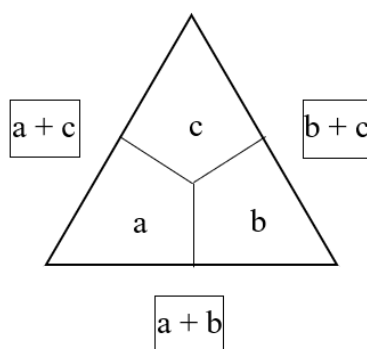
V seminářích předmětu Didaktika matematiky ve studiu učitelství pro 1. stupeň ZŠ na Pedagogické fakultě MU cíleně vytváříme prostor pro analýzu a následnou společnou reflexi úloh, situací a jevů. Pro naši realizaci reflexe je významné využití hospitačního videozáznamu (Najvar et al., 2011). Studenti zde dostávají příležitost k tomu, aby otevřeně a kriticky vyjádřili svůj názor, uplatnili své dosavadní kompetence diagnostické a komunikativní. Smyslem společné detailní analýzy je především to, aby se studenti učili „vidět“ a „pojmenovat“ souvislosti jednotlivých aktivit s osvojováním matematických znalostí. Tím se jim poskytuje určitý vzor pro reflexi vlastní výuky.

Jako vhodná oblast společné reflexe se nabízejí matematické učební úlohy a jejich řešení žáky, neboť jsou považovány za aktuální výzkumná témata didaktiky matematiky a za trvalý předmět zájmu školské praxe (Vondrová et al., 2015). V našem pojetí reflektivní výuky považujeme úlohy a jejich řešení za součást komplexnější výukové situace. Předmětem reflexe jsme učinili úlohy, označované jako „číselné trojúhelníky“. Nejsou ve výuce matematiky obvyklé a vedle rutinních aritmetických výpočtů vyžadují také uplatnění vyšších kognitivních funkcí.

2.2. Číselné trojúhelníky a jejich uplatnění ve výuce

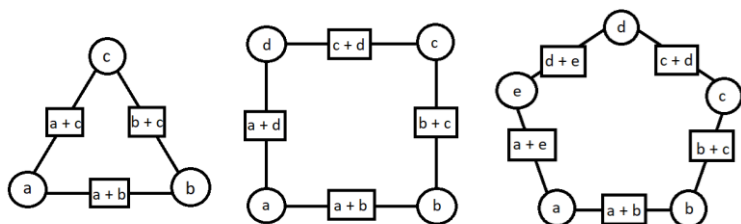
Z hlediska zaměření naší stati považujeme za potřebné zasadit úlohu „číselné trojúhelníky“ (number triangles) do obecnějšího didaktického kontextu. Krauthausen a Schererová (2010) považují číselné trojúhelníky za jedno ze „substantial learning environment“, pro něž je používán český ekvivalent „podnětné výukové prostředí“ (Samková et al., 2015). Wittmann (2001) charakterizuje podnětné výukové prostředí jako výukový celek s následujícími vlastnostmi: představuje ústřední cíle, obsahy a principy výuky matematiky na dané úrovni; týká se významných matematických obsahů, procesů a postupů; je flexibilní a lze ho upravit podle konkrétních podmínek ve třídě; spojuje matematické, psychologické a pedagogické aspekty výuky. Jak připomínají Samková et al. (2015), je podnětné výukové prostředí podmínkou pro uplatnění aktivit, zaměřených na zkoumání a objevování (badatelsky orientované výuky). Využívání podnětných výukových prostředí je rovněž vhodným způsobem, jak docílit „přirozené diferenciací“. Jedná se o takový přístup k problematice heterogenity ve výuce matematiky, kdy diferenciací je vnímána jako něco normálního, dokonce v některých aspektech přínosného. „*Podstatné je, že všichni žáci ve třídě mohou současně pracovat na stejném obsahu, řešit stejnou úlohu a to na různých úrovních podle svých schopností*“ (Tichá, 2010, s. 299).

Číselný trojúhelník se skládá ze tří vnitřních a tří částí vnějšího pole, přiléhajících k jednotlivým stranám trojúhelníku. V každém z částí pole je zapsáno jedno přirozené číslo, popřípadě určitý počet symbolů zastupujících přirozená čísla (písmena a , b , c). Přitom vždy platí pravidlo, že v každé části vnějšího pole je zapsán výsledek součtu dvou čísel (počtu symbolů) z přilehlých vnitřních polí (obr. 1)¹.



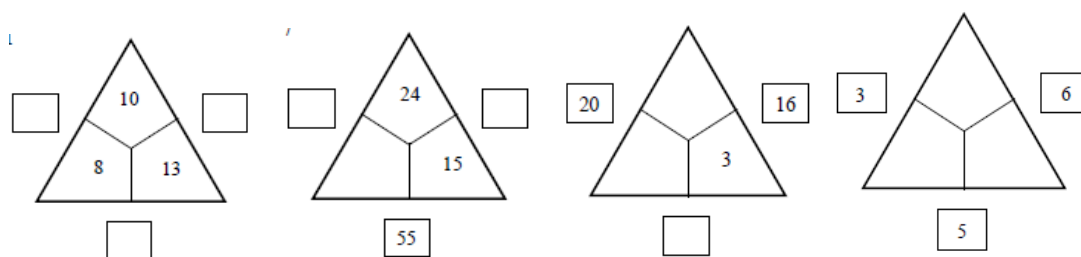
Obrázek 1. Číselný trojúhelník - zápis pravidla pro součet sousedních polí.

¹ Na podobném principu je založen tzv. *arithmagon* nebo *arithmogon* (Mason, J., Burton, L., & Stacey, K., 2010; Wittmann, E.C., 2001). Arithmagon se však zaměřuje na operace s čísly ve vrcholech trojúhelníků, čtverců nebo pětúhelníků. Wittmann (2001) na souvislost číselných trojúhelníků s arithmagony odkazuje, ale zdůrazňuje, že každé z těchto prostředí směřuje k jiným cílům.



Číselné trojúhelníky mohou být zadány ve čtyřech podobách různé (graduující) obtížnosti. V základním číselném trojúhelníku jsou zadána všechna tři čísla ve vnitřních polích (typ *a*). Pro vyplnění zbylých polí stačí provést v libovolném pořadí tři součty.

Druhým typem je trojúhelník se dvěma zadanými čísly ve vnitřních polích a jedním ve vnějším poli (typ *b*). V trojúhelníku třetího typu je zadáno jedno číslo ve vnitřním poli a dvě čísla v poli vnějším (typ *c*). V těchto trojúhelnících je třeba pro výpočet čísel v dalších polích použít jak sčítání, tak odčítání. Zároveň již není pořadí jednotlivých operací zcela libovolné, v některých případech je dokonce možný pouze jeden postup řešení. Tyto tři typy číselných trojúhelníků lze řešit výpočty bez uplatnění badatelské řešitelské strategie. Jsou tedy vhodné pro seznámení žáků s prostředím číselných trojúhelníků a pochopení jejich základních principů.



Obrázek 2. Číselné trojúhelníky typu *a*), *b*), *c*), *d*).

Nejobtížnějším typem je trojúhelník, ve kterém jsou zadána tři čísla v částech vnějšího pole (typ *d*). Pro určení čísel ve vnitřních polích nestačí pouhé rutinní výpočty. Žáci k jejich určení mohou zvolit různé metody – metoda „pokus-omyl“, systematické dosazování čísel nebo objevení nové strategie řešení s využitím vlastností číselného trojúhelníku.

3. Popis reflexe a autentické výpovědi studentů²

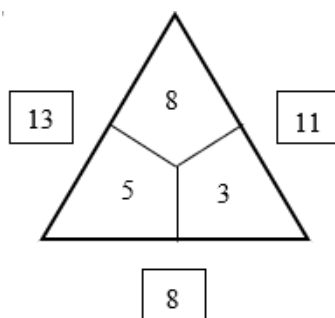
Data uvedená v příspěvku jsme získali při použití reflektivní analýzy studentských řešení. Zaměřili jsme se na hledání odpovědi na dvě otázky:

- 1) Jaké řešitelské strategie použijí studenti učitelství pro 1. stupeň ZŠ při řešení různých typů číselných trojúhelníků?
- 2) Jak přijímají studenti úlohy uvedeného typu z hlediska jejich potencionálního využití ve vlastní výuce?

Reflektivní výuka proběhla v semináři z didaktiky matematiky v prosinci 2019 ve skupině 28 studentů 3. ročníku oboru učitelství pro 1. stupeň ZŠ na Pedagogické fakultě MU v Brně.

Výchozím krokem reflektivní aktivity bylo seznámení studentů s prostředím číselných trojúhelníků. Ukázalo se, že tento typ netradiční úlohy je pro ně zcela neznámý, na předcházejících stupních vzdělávání se s ním nesetkali. Těžiště práce spočívalo v řešení vybraných číselných trojúhelníků, které byly studentům zadány ve stejné podobě jako žákům 5. ročníku ZŠ (Blažková, 2020). Aktivitu řídila spolu s vyučujícím spoluautorka příspěvku Růžena, která na videozáznamu demonstrovala ukázky z vlastní výuky. Načrtla na tabuli číselný trojúhelník, doplnila do vnitřních a do částí vnějšího pole příslušná čísla.

² V článku jsou použity ukázky a citace z diplomové práce spoluautorky článku R. Blažkové: *Číselné trojúhelníky jako příležitost k uplatnění badatelské výuky*. Brno: Pedagogická fakulta MU, 2020.



Obrázek 3. Úvodní ukázka vyřešeného číselného trojúhelníku typu a).

Studenti se pokoušeli objevit pravidlo, podle kterého jsou čísla v trojúhelníku umístěna. Svůj „objev“ formulovali různě:

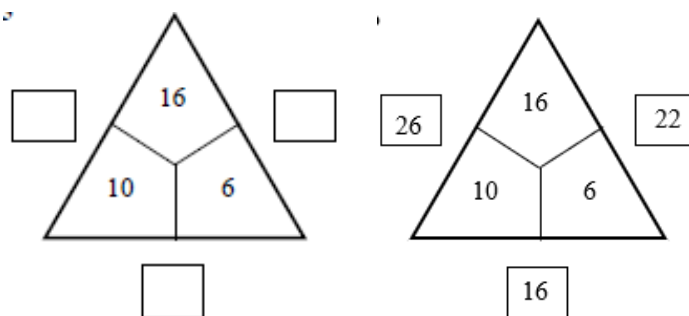
„Je tam asi nějaké pravidlo sčítání. To číslo, které náleží ke straně trojúhelníku, tak se... ta čísla na té straně se sčítají.“

„Sečtou se dvě čísla, která jsou nad sebou nebo vedle sebe. 5 plus 3 je 8, 5 plus 8 je 13, 3 plus 8 je 11.“

Při řešení trojúhelníků typu a) a b) nebyly zaznamenány problémy či neúspěšná řešení, pouze formulace obecného postupu řešení se poněkud lišily:

„Sečetla jsem vždy dvě vnitřní vedlejší strany a výsledek napsala do vnějšího pole.“

„Postupně jsem sčítala vnitřní sousedící pole trojúhelníku a výsledky postupně zapisovala do přilehlého vnějšího pole strany trojúhelníku.“



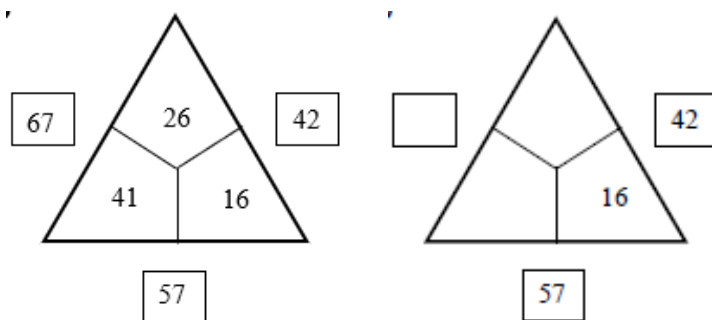
Obrázek 4. Ukázka řešení trojúhelníku typu a).

Řešení trojúhelníku typu c) se ukázalo obtížnější. Studenti uváděli nejčastěji postup řešení, který se opíral o konkrétní zadaná čísla:

„ $42 - 16 = 26$ (číslo v horním vnitřním poli); $57 - 16 = 41$ (poslední chybějící číslo ve vnitřním poli); $26 + 41 = 67$ (číslo ve zbývajícím vnějším poli).“

Obecný postup byl v tomto případě studentkou vyjádřen tímto způsobem:

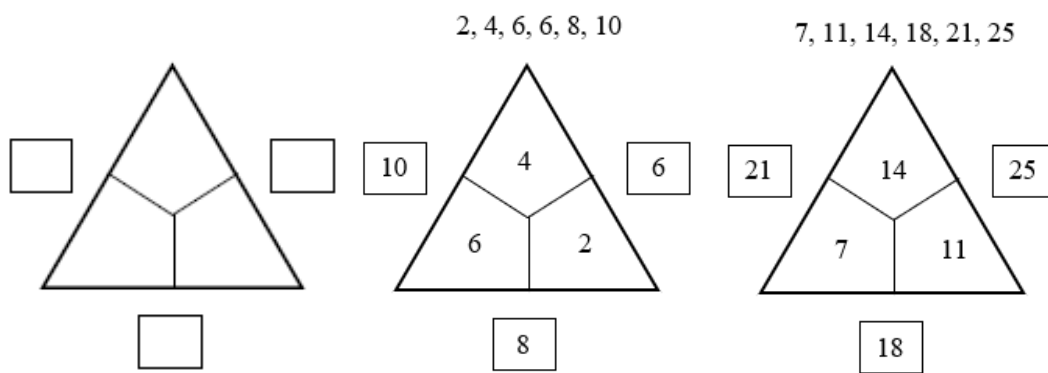
„Odečtení známého čísla v trojúhelníku od výsledku nad stranou; doplnění výsledku do trojúhelníku, zpětná kontrola; výpočet dolní části + kontrola, výpočet levé části“.



Obrázek 5. Ukázka řešení trojúhelníku typu c).

Další úloha byla zadána takto:

Doplň do trojúhelníku čísla, která jsou nad ním napsaná. Použij všechna čísla.



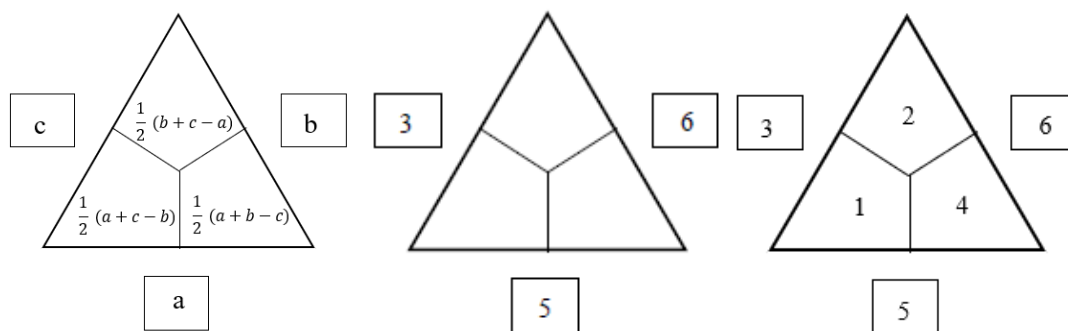
Obrázek 6. Doplnění zadaných čísel do trojúhelníku.

Studenti své úvahy formulovali například takto:

„Jako první vezmeme ta dvě nejmenší čísla, sečteme je, škrtneme ten součet i ta dvě čísla. Pak vezmeme nejmenší číslo, které tam zbylo, a sečteme to. A tak mi to vždycky vyjde.“

Další krok byl zaměřen na odhalení a obecnější popis vztahu mezi vnitřními a vnějšími čísly trojúhelníků. Pokud označíme vnitřní čísla trojúhelníku a , b , c (obr. 1), můžeme říci, že součet vnitřních čísel je $a + b + c$. Z obrázku 1 též vyplývá, že součet vnějších čísel je $(a + b) + (b + c) + (a + c) = 2(a + b + c)$. Odtud plyne, že součet vnějších čísel je dvojnásobkem součtu vnitřních čísel. Uvedený poznatek lze využít při řešení trojúhelníku d).

Pokud nyní označíme písmeny a , b a c vnější čísla, můžeme vnitřní číslo v horním poli vyjádřit jako rozdíl $\frac{a+b+c}{2} - a$. Z předchozí úvahy totiž víme, že součet vnitřních čísel je roven polovině ze součtu všech tří vnějších čísel, a vnější číslo a představuje součet dvou zbylých vnitřních čísel. Proto je vnitřní číslo v horním poli $x = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{1}{2}(b + c - a)$. Obdobně lze určit i zbylá dvě vnitřní čísla (obr. 7).



Obrázek 7. Výpočet vnitřních čísel ze zadaných vnějších čísel v trojúhelníku typu d).

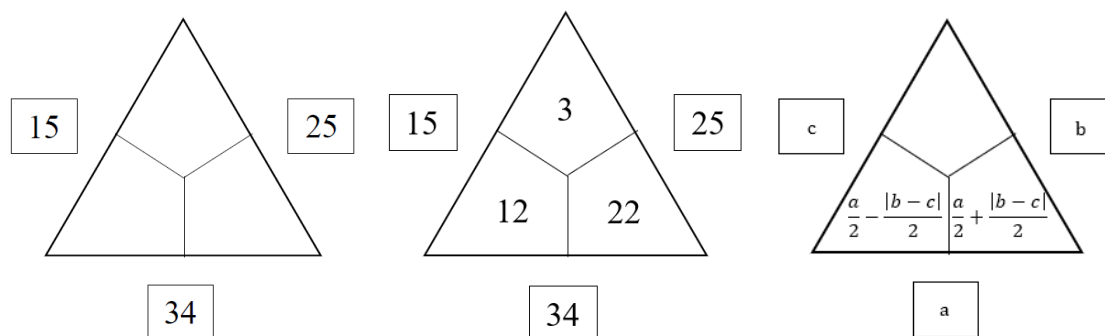
Některé autentické studentské odpovědi na otázku, jakou metodu použili při hledání vnitřních čísel (obr. 8):

„Metodou pokus-omyl, rozdělila jsem 34 na 17 a 17, a pak jsem na jedné straně přidávala a na druhé ubírala podle toho, jak mi to vycházelo.“

Jiná studentka tento postup upřesnila a popsala jednoduchý postup, jak řešit trojúhelníky se třemi vnějšími čísly:

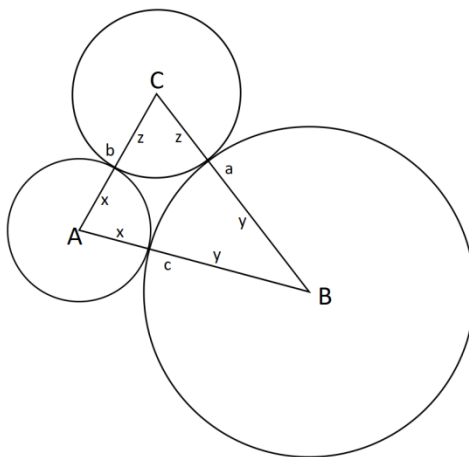
„Vždy jsem spodní číslo vydělila 2 a poté si odečetla rozdíl čísel na stranách a podle toho upravila polovinu spodního čísla.“

Toto tvrzení bylo doplněno výpočty potřebnými k vyřešení trojúhelníku na obrázku 8: „ $34:2=17$; $25-15=10$; $10:2=5$; $17-5=12$; $17+5=22$ “.



Obrázek 8. Řešení trojúhelníku se třemi zadanými vnějšími čísly.

Rozsah příspěvku neumožňuje uvést všechny etapy práce s číselnými trojúhelníky, které byly v průběhu semináře realizovány a reflektovány. Například byla diskutována souvislost aritmetického a geometrického pohledu na číselné trojúhelníky, jak ji prezentuje Wittmann (2001), a kterou jsme využili při obecném řešení trojúhelníku typu d). Autor uvádí, že matematická podstata číselných trojúhelníků vychází z následujícího geometrického problému: *Je dán trojúhelník ABC. Sestrojte tři kružnice se středy ve vrcholech tohoto trojúhelníku, pro které platí, že každé dvě kružnice mají vždy právě jeden bod dotyku.*



Obrázek 9. Geometrická interpretace číselného trojúhelníku.

Z obrázku 9 vyplývá, že $x + y = c$, $y + z = a$, $x + z = b$. Proto je $c + a = (x + y) + (y + z) = (x + z) + 2y = b + 2y$ a tudíž $y = \frac{1}{2}(c + a - b)$. Stejně tak platí, že $x = \frac{1}{2}(b + c - a)$ a $z = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

Studenty zaujala také otázka počtu řešení trojúhelníků se zadanými čísly (více než jeden postup řešení, neřešitelné trojúhelníky), diskuse o tom, kdy mohou být vnitřní a vnější čísla lichá a sudá. Domníváme se, že i z uvedeného je zřejmý významný motivační potenciál prostředí číselných trojúhelníků.

4. Shrnutí, diskuse a závěry

Zkušenosti z využívání reflektivní analýzy zaměřené na studentský přístup k netradičním úlohám, s nimiž se dosud ve školním vzdělávání v roli žáka nesetkali, přinesly některé podněty, které se pokusíme shrnout a odpovědět na otázky, které jsme si položili.

Postupy, které studenti při vlastním řešení použili, byly velmi rozmanité. Nebylo smyslem vlastní reflexe ani tohoto článku je blíže kvantifikovat. Bylo však zřejmé, že převážně postupovali v intencích možností žáků páté třídy: metodou pokus – omyl, bez hlubšího zdůvodnění a patřičné argumentace. Pouze výjimečně bylo možno zaznamenat sofistikovanější postupy a znalosti osvojené v předchozím matematickém vzdělávání. Potvrdila se tím naše zkušenost, kterou jsme zaznamenali při analýze studentských řešení nestandardních úloh již v minulém období (Nováková, 2019).

Studenty aktivita plně zaujala, diskuse se vedle hledání vlastního řešení jednotlivých typů trojúhelníků zaměřovala především na to, zda a v jaké podobě bude možné úlohy využít v praxi výuky ve vyšších ročnících 1. stupně základní školy.

Z autentických názorů studentů:

„Mně se to líbí, protože jsem nad tím i já musela přemýšlet a myslím, že to ty děti rozvíjí. Je to úplně jiný typ příkladů, než na jaký jsou zvyklí z učebnic.“

„Mě překvapilo, kolik se toho dá s tím jedním trojúhelníkem zvládnout.“

„Přišlo mi super, že jsou tam nejdřív lehčí příklady, pak těžší a pak zase lehčí. Zase se tam nevyužívá tolik přechod přes desítku, ale jsou tam ty základní počty. Takže je to i pro slabší žáky motivující.“

„Rozvíjí to kreativitu dětí. Někteří v tom hledají systém, jiní řeší metodou pokus-omyl.“

„Mně přijde, že žáci se můžou cítit svobodnější. Je super, že nejsou uzavřeni do určitého postupu.“

„Určitě by to šlo využít pro ty šikovnější ve třídě nebo pro ty, kteří tu běžnou látku zvládají s přehledem.“

„Je to vhodné pro všechny žáky. Ti slabší zůstanou jen u počítání a ti šikovnější pak můžou hledat ten systém a důkazy.“

Na rozdíl od spontánního přijetí prostředí číselných trojúhelníků studenty učitelství byly názory učitelů pátých tříd, ve kterých diplomantka Růžena „experimentální výuku“ realizovala, poněkud různorodé:

„Nemůžu přece věnovat hodiny výuky na to, aby si žáci pracovali po svém a povídali si, aniž bychom se posunuli v učivu.“

„Žáky je nutné motivovat známkami nebo pochvalou před spolužáky a odměnou, jinak jejich snaha polevuje.“

„Žáci mě mile překvapili svou schopností vést diskuzi a argumentovat. Abstraktnější závěry byli schopni vyvodit jen žáci, kteří se hlásí na víceletá gymnázia.“

„U některých žáků jsem nečekala takovou aktivitu a zápal.“

Prostřednictvím řešení a bližšího „zkoumání“ vybraných úloh z prostředí číselných trojúhelníků jsme se pokusili angažovat studenty do uvažování o sobě, o své připravenosti k efektivní výuce matematiky. Podstatnou se jeví konfrontace studentských pohledů na úlohy s videozáznamem vybraných sekvencí řešení žáků v reálném prostředí výuky. Změnu pohledu studenta na řešení úloh určených pro žáky 1. stupně ZŠ považujeme za jeden z elementů konstrukce profesní identity učitele, jeho profesního přesvědčení (Pajares, 1992). Budoucí učitel již není pouhým řešitelem úlohy, jehož cílem je úlohu (co nejrychleji a podle požadavků svého učitele) vyřešit. Proces budování individuální identity učitele, do něhož se promítá také přesvědčení o připravenosti studenta k řízení učební činnosti žáků při řešení úloh (Dofková, 2016), je však v didakticky zaměřených předmětech studia teprve nastartován.

Literatura

- Blažková, R. (2020). Číselné trojúhelníky jako příležitost k uplatnění badatelské výuky. *Diplomová práce*. Brno: Pedagogická fakulta MU.
- Dofková, R. (2016). *Přesvědčení o připravenosti budoucích učitelů matematiky jako didaktická výzva primárního vzdělávání*. Olomouc: Univerzita Palackého.
- Hošpesová, A., & Tichá, M. (2007). Kvalifikovaná pedagogická reflexe – cesta ke zlepšení kultury vyučování. In A. Hošpesová, N. Stehlíková, M. Tichá (Eds.), *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice* (49–80). České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.
- Janík, T. (2009). *Didaktické znalosti obsahu a jejich význam pro oborové didaktiky, tvorbu kurikula a učitelské vzdělávání*. Brno: Paido.
- Janík, T., Slavík, J., Mužík, V., Trna, J., Janko, T., Lokajíčková, V., ... & Zlatníček, P. (2013). *Kvalita (ve) vzdělávání: obsahově zaměřený přístup ke zkoumání a zlepšování výuky*. Brno: Masarykova univerzita.
- Korthagen, F. (2011). *Jak spojit praxi s teorií: didaktika realistického vzdělávání učitelů*. Brno: Paido.
- Korthagen, F. A., & Vasalos, A. (2005). Levels in reflection: core reflection as a means to enhance professional growth. *Teachers and Teaching: theory and practice*, 11(1), 47–71.

- Kosová, B., & Tomengová, A., et al. (2015). *Profesijná praktická príprava budúcich učiteľov*. Banská Bystrica: Belianum.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically*. Harlow: Pearson Education.
- Najvar, P., Najvarová, V., Janík, T., & Šebestová, S. (2011). *Videostudie v pedagogickém výzkumu*. Brno: Paido.
- Nezvalová, D. (2000). *Některé trendy v pregraduální přípravě učitelů*. Olomouc: Univerzita Palackého.
- Nováková, E. (2019). Matematické učební úlohy očima studentů učitelství pro 1. stupeň ZŠ. *Elementary Mathematics Education Journal*, 1(1), 72–82.
- Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307–332.
- Píšová, M. (2005). *Klinický rok: Procesy profesního rozvoje studentů učitelství a jejich podpora*. Pardubice: Univerzita Pardubice.
- Píšová, M., Najvar, P., Janík, T., Hanušová, S., Kostková, K., Janíková, V., Tůma, F., & Zerková, J. (2011). *Teorie a výzkum expertnosti učitelské profese*. Brno: MuniPress.
- Pollard, A., Collins, J., Maddock, M., Simco, N., Swaffield, S., Warin, J., & Warwick, P. (2006). *Reflective teaching: Evidence-informed professional practice*. London: Continuum.
- Samková, L., Hošpesová, A., Roubíček, F., & Tichá, M. (2015). Badatelsky orientované vyučování matematice. *Scientia in educatione*, 6(1), 91–122.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, 57(1), 1–23.
- Spilková, V., Tomková, A., Mazáčová, N., & Kargerová, J. (2015). *Klinická škola a její role ve vzdělávání učitelů*. Praha: Retida.
- Švec, V. (2005). Sebereflexe jako nástroj profesionálního (sebe)rozvíjení začínajících učitelů. *Pedagogická orientace*, 7(3), 2–13.
- Svojanovský, P. (2016). Podpora reflexe studentů učitelství perspektivou jejich vzdělavatelů. In V. Švec, P. Svojanovský, & B. Pravdová (Eds.), *Determinanty účinnosti učitelských praxí* (45–76). Brno: Masarykova univerzita.
- Syslová, Z., Píšová M., Rodová, V., Černá, M., Grůzová, L., Nováková, E., & Stadlerová, H. (2018). *Podpora tvorby profesního portfolia v přípravném vzdělávání učitelů mateřských a 1. stupně základních škol*. Brno: MU.
- Tichá, M. (2010). Podnětná výuková prostředí pro přirozenou diferenciaci. In M. Uhlířová (Ed.) *Matematika 4. Matematické vzdělávání v kontextu proměn primární školy*. Olomouc: Univerzita Palackého.
- Tomková, A. (2018). *Portfolio v perspektivě reflektivně pojatého vzdělávání učitelů*. Praha: Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy.
- Vondrová, N., Rendl, M., Havlíčková, R., Hříbková, L., Páchová, A., & Žalská, J. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Praha: Karolinum.
- Wittmann, E. C. (2001). Developing Mathematics Education in a Systemic Process. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 1–20.