

Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics

The Union of Czech Mathematicians and Physicists, Olomouc branch



Elementary Mathematics Education Journal

2020

EJME

Elementary Mathematics Education
Journal

Vol. 2

No. 2



Olomouc 2020

ISSN 2694-8133

Univerzita Palackého v Olomouci

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

ve spolupráci s

Jednotou českých matematiků a fyziků

pobočný spolek Olomouc

Elementary Mathematics Education Journal

ročník 2, číslo 2

2020

Palacký University Olomouc
Faculty of Education
Department of Mathematics

in cooperation with

The Union of Czech Mathematicians and Physicists
Olomouc branch

Elementary Mathematics Education Journal

Vol. 2, No. 2

2020

Elementary Mathematics Education Journal

<http://emejournal.upol.cz>

Vydavatel: Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Česká republika

Předseda redakční rady: David Nocar (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika)

Redakční rada: Csaba Csíkos (Eötvös Loránd Tudományegyetem, Maďarsko), Radka Dofková (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika), Ján Gunčaga (Univerzita Komenského v Bratislave, Slovensko), Pavol Hanzel (Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, Slovensko), Vlastimil Chytrý (Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem, Česká republika), Michaela Kaslová (Univerzita Karlova, Česká republika), Eszter Herendiné Kónya (Debreceni Egyetem, Maďarsko), Janka Kopáčová (Katolícka univerzita v Ružomberku, Slovensko), Radek Krpec (Ostravská univerzita, Česká republika), Josef Molnár (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika & Jednota českých matematiků a fyziků, pobočný spolek Olomouc), David Nocar (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika), Bohumil Novák (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika), Eva Nováková (Masarykova Univerzita, Česká republika), Edita Partová (Univerzita Komenského v Bratislave, Slovensko), Šárka Pěchoučková (Západočeská univerzita v Plzni, Česká republika), Adam Plocki (Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie, Polsko), Milan Pokorný (Trnavská univerzita v Trnave, Slovensko), Alena Prídavková (Prešovská univerzita v Prešove, Slovensko), Jana Příhonská (Technická univerzita v Liberci, Česká republika), Grażyna Rygał (Uniwersytet Humanistyczno-Przyrodniczy im. Jana Długosza w Częstochowie, Polsko), Libuše Samková (Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Česká republika), Iveta Scholtzová (Prešovská univerzita v Prešove, Slovensko), Ewa Swoboda (Państwowa Wyższa Szkoła Techniczno-Ekonomiczna w Jarosławiu im. ks. Bronisława Markiewicza, Polsko), Ondrej Šedivý (Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Slovensko), Ilona Olahne Teglassi (Eszterházy Károly Egyetem, Maďarsko), Martina Uhlířová (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika), Patrik Voštinár (Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, Slovensko), Katarína Žilková (Univerzita Komenského v Bratislave, Slovensko)

Redakce:

David Nocar (výkonný redaktor, editor), Radka Dofková (redaktor – editor), Martina Uhlířová (redaktor – příjem článků), Květoslav Bártek (redaktor – web administrátor)

Adresa a kontakty:

Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Česká republika
emej@upol.cz

Informace pro autory:

Časopis uveřejňuje články k aktuálním problémům z teorie elementární matematiky, o inovacích, trendech a výzkumech v primárním a preprimárním matematickém vzdělávání. Jednotlivé články jsou anonymně posuzovány dvěma odborníky v recenzním řízení typu „double-blind peer review“. Další informace a podrobné pokyny pro autory jsou k dispozici na webu: <http://emejournal.upol.cz>.

Za kvalitu obrázků, jazykovou správnost, dodržení bibliografické normy a dodržování publikační etiky odpovídají autoři jednotlivých článků.

Časopis vychází dvakrát ročně.

Ročník 2, číslo 2

Eds. © David Nocar, Radka Dofková, 2020
© Univerzita Palackého v Olomouci, 2020

ISSN 2694-8133

Elementary Mathematics Education Journal

<http://emejournal.upol.cz>

Publisher: Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic

Editor-in-chief: David Nocar (Palacký University Olomouc, Czech Republic)

Editorial Board: Csaba Csíkos (Eötvös Loránd University, Hungary), Radka Dofková (Palacký University Olomouc, Czech Republic), Ján Gunčaga (Comenius University in Bratislava, Slovakia), Pavol Hanzel (Matej Bel University, Slovakia), Vlastimil Chytrý (Jan Evangelista Purkyně University in Ústí nad Labem, Czech Republic), Michaela Kaslová (Charles University, Czech Republic), Eszter Herendiné Kónya (University of Debrecen, Hungary), Janka Kopáčová (Catholic University in Ružomberok, Slovakia), Radek Krpec (University of Ostrava, Czech Republic), Josef Molnár (Palacký University Olomouc, Czech Republic & The Union of Czech Mathematicians and Physicists, Olomouc branch), David Nocar (Palacký University Olomouc, Czech Republic), Bohumil Novák (Palacký University Olomouc, Czech Republic), Eva Nováková (Masaryk University, Czech Republic), Edita Partová (Comenius University in Bratislava, Slovakia), Šárka Pěchoučková (University of West Bohemia, Czech Republic), Adam Plocki (Pedagogical University of Cracow, Poland), Milan Pokorný (Trnava University, Slovakia), Alena Prídavková (University of Prešov, Slovakia), Jana Příhonská (Technical University of Liberec, Czech Republic), Grażyna Rygał (Jan Długosz University in Czeszochowa, Poland), Libuše Samková (University of South Bohemia in v České Budějovice, Czech Republic), Iveta Scholtzová (University of Prešov, Slovakia), Ewa Swoboda (State Higher School of Technology and Economics in Jarosław, Poland), Ondrej Šedivý (Constantine the Philosopher University in Nitra, Slovakia), Ilona Olahne Teglasi (Eszterhazy Karoly University, Hungary), Martina Uhlířová (Palacký University Olomouc, Czech Republic), Patrik Voštinár (Matej Bel University, Slovakia), Katarína Žilková (Comenius University in Bratislava, Slovakia)

Redaction:

David Nocar (executive redactor, editor), Radka Dofková (redactor – editor), Martina Uhlířová (redactor – receiving articles), Květoslav Bártek (redactor – web administrator)

Address and contacts:

Department of Mathematics, Faculty of Education, Palacký University Olomouc
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic
emej@upol.cz

Information for authors:

The journal publishes articles on current issues in the theory of elementary mathematics, about innovation, trends and research in primary and pre-primary mathematics education. Each article is reviewed by two anonymous experts (“double-blind peer review”). More information and other instructions for authors are available at: <http://emejournal.upol.cz>.

The authors of the articles are responsible for the quality of the images, language accuracy, compliance with bibliographic standards and adherence to publication ethics.

The journal is published twice a year.

Vol. 2, No. 2

Eds. © David Nocar, Radka Dofková, 2020
© Palacký University Olomouc, 2020

ISSN 2694-8133

Obsah

Jana FIALOVÁ: <i>Eulerova veta a konštrukcia mnohostena s daným počtom stien, vrcholov a hrán</i>	6
Jana HNATOVÁ, Marek MOKRIŠ: <i>Spol'ahlivosť a presnosť hodnotenia kognitívneho výkonu študentmi študijného odboru učiteľstvo a pedagogické vedy v predmete matematická gramotnosť</i>	12
Eva NOVÁKOVÁ, Růžena BLAŽKOVÁ: <i>Číselné trojúhelníky: pohled budoucích učitelů na netradiční úlohy</i>	22
Karel PASTOR: <i>Divisibility and MS Excel</i>	32
Karel PASTOR: <i>Chess piece tour problems</i>	38
Renáta ZEMANOVÁ, Darina JIROTKOVÁ: <i>Incentivy změn v přístupu žáků k matematice na 1. stupni ZŠ</i>	46

Content

Jana FIALOVÁ: <i>Euler's formula and construction of a polyhedron with given number of faces, vertices and edges</i>	6
Jana HNATOVÁ, Marek MOKRIŠ: <i>Bias and accuracy of evaluation of cognitive performance by students of the study department teaching and pedagogical sciences in the subject mathematical literacy</i>	12
Eva NOVÁKOVÁ, Růžena BLAŽKOVÁ: <i>Number triangles: a view of prospective teachers for non-traditional tasks</i>	22
Karel PASTOR: <i>Divisibility and MS Excel</i>	32
Karel PASTOR: <i>Chess piece tour problems</i>	38
Renáta ZEMANOVÁ, Darina JIROTKOVÁ: <i>Incentives to changes of pupils' attitude towards mathematics in primary school</i>	46

EULEROVA VETA A KONŠTRUKCIA MNOHOSTENA S DANÝM POČTOM STIEN, VRCHOLOV A HRÁN

Jana FIALOVÁ

Trnavská univerzita v Trnave, Pedagogická fakulta (Slovensko)

jana.fialova@truni.sk

Abstrakt

Eulerova veta hovorí, že medzi počtom stien s , vrcholov v a hrán h ľubovoľného mnohostena, ktorý je topologicky ekvivalentný guli (tj. nemá žiadnu dieru), je pevne daný vzťah $s + v - h = 2$. Otázky, ktoré si kladieme v tejto práci sú: Existuje mnohosten topologicky ekvivalentný guli k ľubovoľnej trojici čísel s , v , h spĺňajúcej tento vzťah? Ak áno, ako možno takýto mnohosten zostrojiť?

Kľúčové slová: mnohosten, Eulerova veta, topológia, konštrukcia mnohostenov.

EULER'S FORMULA AND CONSTRUCTION OF A POLYHEDRON WITH GIVEN NUMBER OF FACES, VERTICES AND EDGES

Abstract

Euler's formula tells us, that there is a formula between number of faces s , vertices v , and edges h of any polyhedron, which is topologically equivalent to a sphere (i.e. it has no hole): $s + v - h = 2$. In the paper, we consider, if there exists a polyhedron topologically equivalent to a sphere for any three numbers s , v , h which fulfil the Euler's formula and if it exists, how could be such polyhedron constructed.

Keywords: polyhedron, Euler's formula, topology, construction of polyhedrons

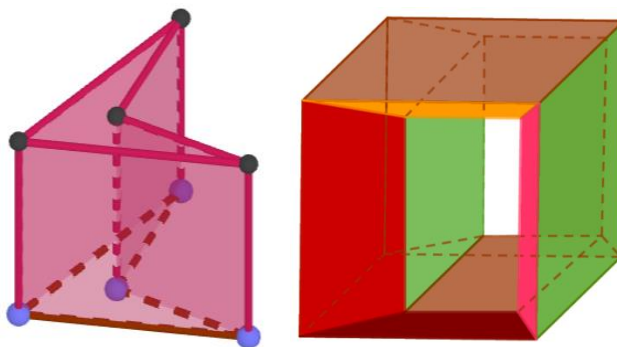
1. Úvod

Mnohosten je trojrozmerné geometrické teleso, ktorého povrch sa skladá z konečného množstva stien tvorených pravidelnými alebo nepravidelnými mnohouholníkmi. Steny mnohouholníka sa pretínajú v úsečkách, ktoré nazývame hranami mnohostena. Hrany sa spájajú v bodoch, ktoré nazývame vrcholmi mnohostena. Mnohostenom s najmenším počtom vrcholov, hrán a stien je štvorsten. Štvorsten má 4 steny, 4 vrcholy a 6 hrán.

Mnohosteny môžu byť konvexné alebo nekonvexné. Pre konvexné mnohosteny platí, že celý mnohosten leží v jednom podpriestore ohraničenom rovinou incidentnou s ľubovoľnou stenou mnohostena. Toto platí pre všetky steny konvexného mnohostena. Ak existuje stena, ktorá leží v rovine, ktorá delí priestor na dva podpriestory, pričom časť mnohostena leží v jednom a časť v druhom podpriestore, tak takýto mnohosten je nekonvexný. Konvexnosť však nie je pre naše úvahy relevantná. Dôležité je, či mnohosten má nejaké „diery“. Na vysvetlenie pojmu diera v mnohostene, musíme trochu odbočiť k zaujímavej oblasti geometrie, zvanej topológia. V topológii vôbec nezáleží na rozmeroch geometrických útvarov. Ak by sme vzali napríklad pravidelný štvorsten zhotovený z plastelíny, mohli by sme ho ľubovoľne

stláčať, naťahovať, ohýbať a stále by vzniknutý útvar bol topologicky ekvivalentný pôvodnému štvorstenu. Zakázané je iba robiť do neho diery alebo zlepovať pôvodne nespojené časti. Týmto spôsobom nie je problém pretvoriť štvorsten napríklad na kocku, či guľu. To znamená, že vlastne akékoľvek teleso bez diery, možno pretransformovať na guľu. Hovoríme teda, že je topologicky ekvivalentné guľi. Všetky konvexné telesá sú topologicky ekvivalentné guľi.

Na obrázku 1 vidíme dva nekonvexné mnohosteny, z ktorých prvý je a druhý nie je topologicky ekvivalentný guľi.



Obrázok 1: Nekonvexné mnohosteny

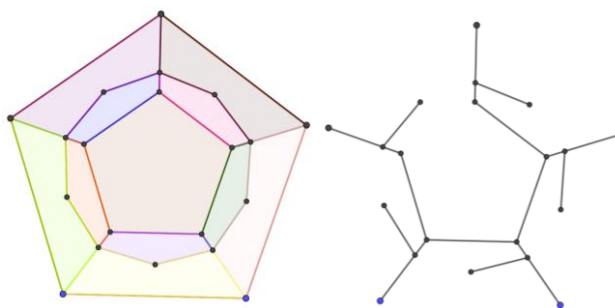
V ďalšom texte budeme všade pod pojmom mnohosten rozumieť mnohosten topologicky ekvivalentný guľi.

2. Eulerova veta a jej dôkaz

Eulerova veta pochádza z roku 1750 a hovorí, že v každom mnohostene, ktorý je topologicky ekvivalentný guľi (teda aj v každom konvexnom mnohostene), pre počet stien s , počet vrcholov v a počet hrán h platí: $s + v - h = 2$.

Dokonca existuje aj jej zovšeobecnenie pre úplne všetky mnohosteny: $s + v - h = 2 - 2d$, kde d je počet dier. V tomto texte sa však budeme zaoberať iba telesami bez dier.

Dôkaz Eulerovej vety nie je vôbec náročný. Myšlienka nasledujúceho dôkazu pochádza z roku 1811, kedy ju priniesol A. L. Cauchy (Čížmár, 2017). Pri dôkaze postupujeme tak, že si predstavíme dutý model mnohostena. V tomto modeli zrušíme jednu stenu, takže vznikne otvor dovnútra mnohostena. Tento otvor potom rozťahujeme tak, aby sme v konečnej fáze celý model mnohostena „rozpleštili“ na plochu. Týmto spôsobom sme síce možno poohýbali nejaké hrany, zmenili tvar stien, ale incidencia vrcholov, hrán a stien zostala zachovaná. Počet stien sa zmenšil o jednu stenu, ktorú sme na začiatku vymazali. Preto budeme dokazovať vzťah $s + v - h = 1$. Tento „rozpleštený“ model mnohostena sa nazýva jeho rovinným grafom. Na obrázku 2 vľavo vidíme rovinný graf pravidelného dvanásťstena.



Obrázok 2: Rovinný graf pravidelného dvanásťstena

Teraz vymažeme jednu z vonkajších hrán, čím sa zbavíme jednej hrany a zároveň aj jednej steny. Vrcholy zostanú všetky zachované. Rovnosť $s + v - h = 1$ sa teda nezmení. Toto robíme dovtedy, kým sa nezbavíme všetkých stien (obrázok 2 vpravo).

Ďalej budeme mazať jeden koncový vrchol spolu s hranou. Počet vrcholov sa zníži o jeden, počet hrán tiež, čiže rovnosť je stále zachovaná. Pokračujme ďalej, až kým nezostane iba jediný bod, pre ktorý rovnosť zjavne platí. Eulerov vzťah je dokázaný.

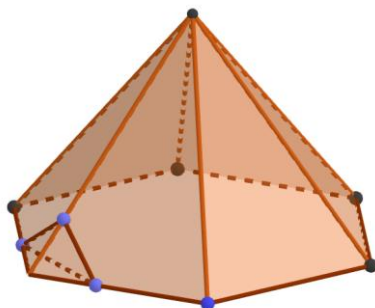
Problematikou vzťahu medzi mnohostenom a jeho grafom sa hlbšie venoval geometer Ernst Steinitz, ktorý dokázal, že každému mnohostenu možno priradiť graf, ktorého všetky vrcholy sú incidentné s aspoň tromi hranami (3-connected) a každé dve hrany majú spoločný najviac jeden bod – vrchol. Steinitzova veta platí aj obrátene – ku každému takémuto grafu vieme priradiť nejaký mnohosten (de Oliveira, 2013). Zo Steinitzovej vety potom vyplýva, že je možné zostrojiť mnohosten s daným počtom stien, vrcholov a hrán v prípade, že sú splnené určité podmienky. Tieto podmienky odvodíme v poslednej kapitole tohto článku.

V nasledujúcej kapitole priblížime vlastný jednoduchý postup, ako zostrojiť konkrétny mnohosten s daným počtom stien, vrcholov a hrán.

3. Konštrukcia mnohostena metódou odrezávania rohov

V tejto časti budeme konštruovať mnohosteny tak, že začneme n -bokým ihlanom. Každý n -boký ihlan má práve $n + 1$ stien, $n + 1$ vrcholov a $2n$ hrán. Hraničným prípadom je trojboký ihlan, čiže štvorsten s $n = 3$.

V každom ihlane je zaručene aspoň jeden vrchol, z ktorého vedú práve tri hrany. Pri takomto vrchole urobíme rez tak, ako na obrázku 3.



Obrázok 3: Metóda odrezávania rohov

Rezom sme zvýšili celkový počet stien o jednu, počet vrcholov o dva, pretože vznikli tri nové vrcholy, ale jeden pôvodný sme odstránili. Počet hrán sa zvýšil o tri.

Tento postup môžeme opakovať, pretože tri nové vrcholy sú práve také, z ktorých vedú tri hrany, čiže aj po „odrezaní“ budeme mať zaručene taký vrchol, z ktorého idú tri hrany a ktorý teda môžeme „odrezať“.

Ak si označíme počet rezaní písmenom t , tak po t rezoch na n -bokom ihlane budeme mať mnohosten so $s = n + 1 + t$ stenami, $v = n + 1 + 2t$ vrcholmi a $h = 2n + 3t$ hranami.

Keď si všimneme vzťah medzi počtom stien a vrcholov, vidíme že $v - s = t$. Takže týmto postupom vieme zostrojiť taký mnohosten, ktorého počet stien je ľubovoľné číslo väčšie alebo rovné štyrom, počet vrcholov je väčší ako počet stien, ale nie oveľa. Konkrétne, ak t je rozdiel medzi počtom stien a vrcholov, počet stien musí zostať aj po odpočítaní tohto t väčší alebo

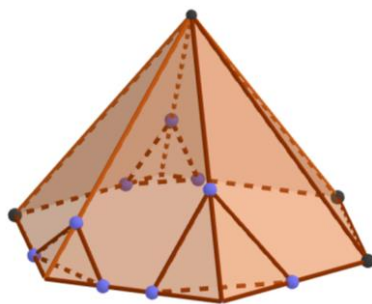
rovný štyrom, aby platilo, že $n + 1$ je rovné aspoň 4. Z toho dostávame $s - t \geq 4$. Ak za t dosadíme $v - s$, tak dostaneme $v \leq 2s - 4$.

Metódou odrezávania rohov teda vieme zostrojiť mnohosteny, pre také tri čísla s , v , h , pre ktoré platí:

1. Počet stien s je ľubovoľné prirodzené číslo väčšie ako tri,
2. Počet vrcholov v je ľubovoľné prirodzené číslo z intervalu $[s; 2s - 4]$,
3. Počet hrán je $h = s + v - 2$.

Príklad 1: Zostrojte mnohosten, ktorý má 10 stien, 13 vrcholov a 21 hrán.

Riešenie: Najprv overíme, či pre túto trojicu platí Eulerova veta. Keďže platí a aj počet vrcholov je v intervale $[10, 2 \cdot 10 - 4]$, tak zistíme počet rezaní ako rozdiel medzi počtom vrcholov a počtom stien, $t = 13 - 10 = 3$. Nakoniec nájdeme pôvodné n zo vzťahu $s = n + 1 - t$, teda $n = 10 - 3 - 1 = 6$. Konštrukcia teda začína šesťbokým ihlanom, z ktorého postupne odrežeme tri rohy – také, z ktorých idú tri hrany. Jednu z možností vidíme na obrázku 4.

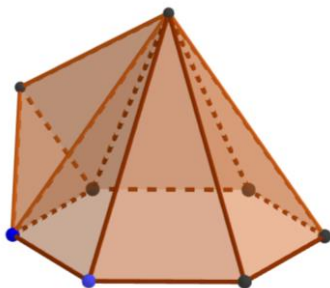


Obrázok 4: Mnohosten so $s = 10$, $v = 13$ a $h = 21$

4. Konštrukcia mnohostena metódou dolepovania trojbokých ihlanov

Aj v tejto časti budeme konštruovať mnohosteny tak, že začneme n -bokým ihlanom. Každý n -boký ihlan má práve $n + 1$ stien, $n + 1$ vrcholov a $2n$ hrán, kde n je väčšie alebo rovné trom.

Každý ihlan má aspoň jednu stenu trojuholníkového tvaru. Nad touto stenou zostrojíme trojboký ihlan tak, že pôvodná stena sa stane jeho podstavou a spoločne zaniknú.



Obrázok 5: Metóda dolepovania trojbokých ihlanov

Dolepením sme zvýšili počet stien o dve, pretože sme pridali tri nové steny, ale odobrali sme jednu pôvodnú. Počet vrcholov sa zvýšil o jeden a počet hrán o tri.

Tri nové steny, ktoré vznikli, sú trojuholníkového tvaru, čo nám dáva istotu, že vždy bude možné nájsť stenu trojuholníkového tvaru, nad ktorou možno znova dolepiť trojboký ihlan. Po t opakovaníach dostaneme mnohosten so $s = n + 1 + 2t$ stenami, $v = n + 1 + t$ vrcholmi a $h = 2n + 3t$ hranami.

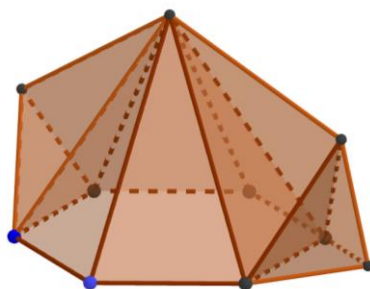
Rozdiel medzi počtom stien a vrcholov je opäť t . V tomto prípade je ale počet stien väčší ako počet vrcholov. Analogicky k predchádzajúcemu postupu dostávame tento výsledok:

Postupným dolepovaním trojbokých ihlanov na pôvodný n -boký ihlan možno skonštruovať mnohosteny pre takéto tri čísla s , v , h :

1. Počet vrcholov v je ľubovoľné prirodzené číslo väčšie ako tri,
2. Počet stien s je ľubovoľné prirodzené číslo z intervalu $[v; 2v - 4]$,
3. Počet hrán je $h = s + v - 2$.

Príklad 2: Zostrojte mnohosten, ktorý má 13 stien, 10 vrcholov a 21 hrán.

Riešenie: Keďže počet stien je väčší ako počet vrcholov, ale stále leží v intervale $[10, 2 \cdot 10 - 4]$, použijeme metódu dolepovania trojbokých ihlanov. Dolepovať bude treba trikrát, keďže rozdiel medzi počtom stien a počtom vrcholov je tri. Číslo n vypočítame zo vzťahu $v = n + 1 + t$. Začneme teda opäť šesťbokým ihlanom. Ihlany dolepujeme na akékoľvek trojuholníkové steny. Jeden príklad vidíme na obrázku 6.



Obrázok 6: Mnohosten so $s = 13$, $v = 10$ a $h = 21$

5. Zhrnutie a dôkaz

Konkrétnymi konštrukciami sme dokázali, že možno zostrojiť mnohosteny pre také trojice čísel s , v , h , pre ktoré platí Eulerova veta a zároveň väčšie z čísel s a v nie je väčšie ako dvojnásobok menšieho čísla zmenšeného o štyri.

Veta 1: *Nech sú dané tri čísla s , v , h , pre ktoré platí $s + v - h = 2$ a zároveň platí, že $4 \leq s \leq v \leq 2s - 4$. Potom existuje aspoň jeden mnohosten, ktorého počet strán sa rovná číslu s , počet vrcholov číslu v a počet hrán číslu h .*

Jeden z možných mnohostenov vieme zostrojiť tak, ako sme popísali v kapitole 3.

Veta 2: *Nech sú dané tri čísla s , v , h , pre ktoré platí $s + v - h = 2$ a zároveň platí, že $4 \leq v \leq s \leq 2v - 4$. Potom existuje aspoň jeden mnohosten, ktorého počet strán sa rovná číslu s , počet vrcholov číslu v a počet hrán číslu h .*

Jeden z možných mnohostenov vieme zostrojiť tak, ako sme popísali v kapitole 4.

Zostáva ešte otázka, či existujú aj také mnohosteny, pre ktoré neplatí podmienka o vzťahu medzi počtom vrcholov a stien.

Na dôkaz tvrdenia, že takéto mnohosteny nemôžu existovať, použijeme tieto jednoduché tvrdenia:

- a) Z každého vrcholu musia nutne viesť aspoň tri hrany. Zároveň každá hrana spája práve dva vrcholy. To znamená, že celkovo v mnohostene musí byť minimálne $3v/2$ hrán. Takže $h \geq 3v/2$. Po dosadení Eulerovho vzťahu: $h = s + v - 2 \geq 1,5v$. Z čoho dostávame $v \leq 2s - 4$.
- b) Ďalej v každom mnohostene platí, že každá stena je ohraničená minimálne tromi hranami a zároveň každá hrana je spoločná pre práve dve steny. Takže celkovo musí byť v mnohostene minimálne $3s/2$ hrán. Po dosadení Eulerovho vzťahu dostaneme hľadanú nerovnosť $s \leq 2v - 4$.

Tým sme dokázali nasledujúcu vetu:

Veta 3: *Nech s, v sú také prirodzené čísla, pre ktoré: $\max(s, v) > 2 \cdot \min(s, v) - 4$. Potom neexistuje žiaden mnohosten, pre ktorý s je počet jeho stien a v počet jeho vrcholov.*

6. Záver

V tomto článku sme ukázali, aké vlastnosti musia spĺňať tri čísla s, v, h , aby existoval mnohosten, ktorého počet strán bude s , vrcholov v a hrán h . Na konštrukciu jedného takéhoto mnohostena stačí využiť jednu z dvoch jednoduchých metód popísaných vyššie. Toto je zaujímavé, keďže týmito postupmi zďaleka nemožno zostrojiť celú plejádu mnohorakých mnohostenov. Je zrejmé, že k danej trojici s, v, h existuje veľa rôznych mnohostenov. Dokonca aj našimi metódami je možné zostrojiť viac ako jeden mnohosten, keďže v každom kroku vyberáme vrchol alebo stenu ľubovoľne z viacerých možných.

Naším cieľom bolo zistiť, či existuje mnohosten pre ľubovoľnú trojicu s, v, h . Dokázali sme, že nie a zároveň sme presne určili, pre ktoré trojice je to možné. Druhým cieľom bolo ukázať jednoduchú metódu, ako konkrétne možno takéto mnohosten zostrojiť, čo sa nám podarilo.

Acknowledgements

Tento článok vznikol vďaka podpore KEGA projektu č. 001UMB-4/2020.

Literatúra

Čižmár, J. (2017). *Dejiny matematiky (od najstarších čias po súčasnosť)*. Bratislava: PERFEKT. ISBN 978-80-8046-829-3.

De Oliveira, A.G. (2013). *Graphs of polyhedra and the theorem of Steinitz*. Porto: CiM Bulletin, číslo 34. Dostupné na: <http://www.cim.pt/magazines/bulletin/6/article/60/pdf>.

SPOLIAHLIVOSŤ A PRESNOSŤ HODNOTENIA KOGNITÍVNEHO VÝKONU ŠTUDENTMI ŠTUDIJNÉHO ODBORU UČITEĽSTVO A PEDAGOGICKÉ VEDY V PREDMETE MATEMATICKÁ GRAMOTNOSŤ

Jana HNATOVÁ, Marek MOKRIŠ

Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (Slovensko)

jana.hnatova@unipo.sk, marek.mokris@unipo.sk

Abstrakt

Meranie spoľahlivosti a presnosti hodnotenia kognitívneho matematického výkonu edukantmi dovoľuje kvantifikovane uchopiť konštrukt metakognitívneho monitorovania v edukačnej praxi. V článku sa zameriavame na špecifickú skupinu vysokoškolských študentov študijného odboru Učiteľstvo a pedagogické vedy ($N = 654$), v ktorej zisťujeme dosahovanú mieru spoľahlivosti a presnosti ich hodnotenia matematického výkonu pomocou kalibračných indexov BIAS a AAI. Ich porovnaním s ideálnymi hodnotami a následnou dekompozíciou efektívnych hypotéz vzhľadom na dosiahnutý klasifikačný stupeň výstupného hodnotenia v predmete Matematická gramotnosť spresňujeme nami dosiahnuté výsledky v tejto špecifickej výskumnej skupine.

Kľúčové slová: presnosť hodnotenia, skreslenie, BIAS, AAI

BIAS AND ACCURACY OF EVALUATION OF COGNITIVE PERFORMANCE BY STUDENTS OF THE STUDY DEPARTMENT TEACHING AND PEDAGOGICAL SCIENCES IN THE SUBJECT MATHEMATICAL LITERACY

Abstract

The measuring the bias and accuracy of evaluating cognitive mathematical performance by educators allows a quantified grasp of the construct of metacognitive monitoring in educational practice. In this article we focus on a specific group of university students in the field of study Teaching and Pedagogical Sciences ($N = 654$), in which we determine the achieved degree of bias and accuracy of their evaluation of mathematical performance using calibration indices BIAS and AAI. By comparing them with ideal values and subsequent decomposition of effective hypotheses with respect to the achieved classification level of the final evaluation in the subject Mathematical Literacy, we specify the results achieved by us in this specific research group.

Keywords: evaluation accuracy, BIAS, IAA

1. Úvod

Výučba matematiky v predmete Matematická gramotnosť patrí k úvodným kurzom vysokoškolského matematického vzdelávania na Pedagogickej fakulte Prešovskej univerzity v Prešove. Bez ohľadu na realizovanú formu vzdelávania, vyžaduje aktívnu účasť študentov, v rámci ktorej sú nútení kontrolovať, ako interagujú s podpornými študijnými materiálmi

svojho kurzu. Táto kontrola je zrejmá najmä zvýšenou aktivitou na seminároch i v počte prístupov do elektronického podporného systému LMS Moodle, a to predovšetkým v období prípravy študentov na priebežné hodnotenia. Úspech v rámci hodnotených aktivít predmetu je totiž aj podľa Zimmermana (2008) do značnej miery ovplyvnený schopnosťou študenta zapojiť sa do samoregulačného učenia, ktorý chápe ako proces vyžadujúci efektívne zvládanie metakognitívnych monitorovacích a kontrolných procesov.

Študent prvého ročníka, ktorý má vo svojom prvom skúškovom období na vysokej škole absolvovať niekoľko skúšok, musí začať rozumne manažovať čas prípravy na ne, pričom zohľadňuje zameranie a ním subjektívne posúdenú náročnosť prípravy na jednotlivé skúšky. Učí sa odhadnúť aktuálny stav svojich vedomostí a dosiahnutú úroveň schopností v porovnaní s očakávaniami, ktoré sú naňho kladené v rámci úspešného absolvovania konkrétneho predmetu. Tento spôsob metakognitívneho monitorovania sa opiera o presnosť a spoľahlivosť, s akou študent pri monitoringu pracuje a často je jedným z faktorov ovplyvňujúcich termínový plán skúšok a časový plán prípravy na ne.

2. Presnosť a spoľahlivosť metakognitívneho monitorovania

Úvodné kurzy vysokoškolského štúdia sa zvyčajne zameriavajú na pokrytie širokej vzorky tém, preto nie je jednoduché nájsť v nich priestor pre ďalší rozvoj metakognitívnych schopností (Morphew, 2020). Metakognitívne schopnosti odkazujúce na spôsoby, akými sa študenti zapájajú do samoregulačných procesov učenia sa, zahŕňajú okrem procesov kontroly aj procesy monitorovania. O zapojení študentov do metakognitívneho monitorovania hovoríme vtedy, ak študenti hodnotia svoj súčasný stav učenia sa na základe daného kritéria (Merritt, 2019).

Tabuľka 1. Prehľad konštruktov a možností ich merania

	Konštrukt	Index	Výpočet	Interpretácia: Index vyhodnocuje...
1.	Absolútna presnosť	Index absolútnej presnosti (AAI)	$p_i = \frac{p'_i}{m_i}$ $AAI = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (c_i - p_i)^2$	... presnosť úsudku spoľahlivosti v porovnaní s objektívnym hodnotením výkonu t. j. hodnotením podľa daného kritéria
2.	Relatívna presnosť	Index relatívnej presnosti (r)	$r = \frac{\sum_{i=1}^N (c_i - \bar{c})(p_i - \bar{p})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (c_i - \bar{c})^2 \sum_{i=1}^N (p_i - \bar{p})^2}}$	... hodnotí (lineárny) vzťah medzi úsudkami spoľahlivosti a objektívnym hodnotením výkonu podľa daného kritéria
3.	Skreslenie	Index skreslenia (Bias)	$Bias = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (c_i - p_i)$	... skreslenie vlastného úsudku určením hodnoty nesúladu a jeho smeru k možnému podhodnocovaniu alebo nadhodnocovaniu vlastného výkonu
4.	Rozptyl	Bodový index (SI)	$N = N_+ + N_-$ $SI = \frac{1}{N} [N_+ \sigma_+^2 - N_- \sigma_-^2]$	... rozdiely v rozptyle spoľahlivo (+) a nespoľahlivo (-) vyhodnotených položiek
5.	Diskriminácia	Diskriminačný index (DI)	$DI = \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^{N_+} c_{i+} - \sum_{i=1}^{N_-} c_{i-} \right]$	... diskrimináciu medzi spoľahlivo (+) a nespoľahlivo (-) vyhodnotenými položkami

Vysvetlivky:

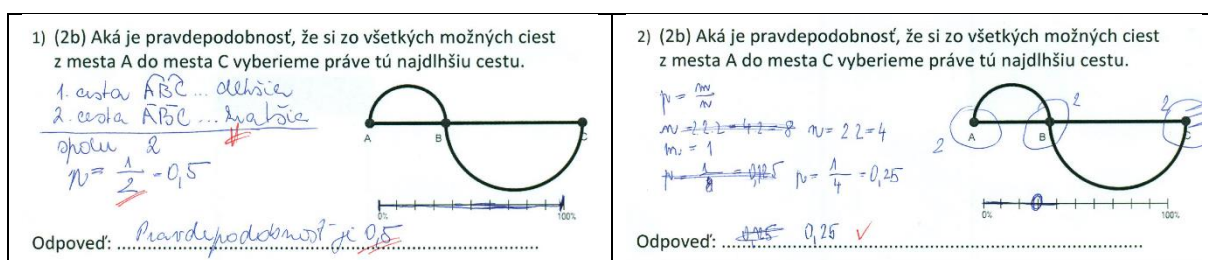
- c_i ... miera subjektívnej istoty správnosti odpovede vyjadrená relatívnou dĺžkou úsečky istoty,
 c_{i+} ... miera subjektívnej istoty správnosti odpovede v spoľahlivo vyhodnotenej položke,
 c_{i-} ... miera subjektívnej istoty správnosti odpovede v nespoľahlivo vyhodnotenej položke,
 p'_i ... objektívne hodnotenie matematického výkonu bodovým skóre v i -tej položke testu,
 m_i ... maximálne bodové skóre v i -tej položke testu,
 p_i ... relatívne bodové hodnotenie matematického výkonu v i -tej položke testu,
 N_+ ... početnosť spoľahlivo vyhodnotených položiek,
 N_- ... početnosť nespoľahlivo vyhodnotených položiek,
 σ_+^2 ... rozptyl spoľahlivo vyhodnotených položiek,
 σ_-^2 ... rozptyl nespoľahlivo vyhodnotených položiek.

Zdroj: (1) Maki a kol. 2005; (2) Nelson 1996; (3,4,5) Schaw 2009; (4) Yates 1998 modifikované podľa potreby výskumného šetrenia

Viacerí autori (Maki a kol., 2005; Nelson, 1996; Schaw, 2009; Yates 1998) uvádzajú vo svojich prácach rôzne konštrukty umožňujúce kvantifikáciu procesov metakognitívneho monitorovania (tab. 1). Vychádzajúc z potrieb štúdie je možné (aj opakovane) realizovať merania vstupných premenných príslušných indexov:

- pred podaním výkonu študenta alebo po jeho výkone (preddikčné alebo postdikčné merania),
- na úrovni každého dosiahnutého stupňa, časti resp. položky výkonu alebo na úrovni celého posudzovaného výkonu (globálne alebo lokálne merania).

Spoľahlivosť úsudkov študentov porovnaním subjektívneho a objektívneho hodnotenia výkonu je možné vyjadriť indexom skreslenia (pozri tab. 1). Index skreslenia (ďalej Bias) nadobúda hodnoty z intervalu $[-1, 1]$ a poskytuje informácie o smere a závažnosti nesúladu medzi deklarovanou subjektívnou istotou a objektívne dosiahnutou výkonnosťou. Ak študent v položke prezentuje vysokú mieru istoty pri nízkej úspešnosti podaného výkonu, index nadobúda kladné hodnoty, ktoré signalizujú nadhodnocovanie vlastného výkonu samotným študentom (obr. 1a). Ak je prezentovaná miera istoty nízka, avšak úspešnosť výkonu je vysoká, index nadobúda záporné hodnoty signalizujúce podhodnocovanie vlastného výkonu študentom (obr. 1b). Navyše, absolútna hodnota Bias indexu vychádzajúca z geometrickej definície vzdialenosti poskytuje taktiež informácie o závažnosti chyby v úsudku. Čím je vzdialenosť hodnoty indexu od nuly väčšia, tým väčší nesúlad medzi subjektívnym a objektívnym hodnotením výkonu index signalizuje.



Obrázok 1. Testová položka s nadhodnoteným výkonom študenta (a) vľavo a s podhodnoteným výkonom študenta (b) vpravo

Konštrukt presnosti úsudku je možné merať pomocou relatívnych alebo absolútnych indexov presnosti (tab. 1). Absolútna presnosť sa vzťahuje na veľkosť odchýlky medzi premennými vyjadrujúcimi (subjektívny) úsudok o istote a (objektívne) hodnotený výkon t. j. podľa jednoznačne daného kritéria. Relatívna presnosť sa zvyčajne meria pomocou korelačného koeficienta (Pearsonovo r) alebo pohotovostného koeficienta (d'Gamma)

a predstavuje schopnosť jednotlivca rozlišovať medzi dvoma premennými, napríklad medzi spoľahlivo a nespoľahlivo riešenými položkami (Lindel, Lenhart, Schneider, 2019). Za spoľahlivo riešené položky sú považované tie, v ktorých sa študentov subjektívny úsudok o istote zhodne s objektívnym hodnotením položky. Ostatné položky, v ktorých zhoda nenastane, sú považované za nespoľahlivo riešené. Podobne aj ďalšie konštrukty (diskriminácia a rozptyl, pozri tab. 1) reprezentované diskriminačným a bodovým indexom pracujú s porovnávaním premenných súvisiacich so spoľahlivo a nespoľahlivo riešenými položkami.

V tomto príspevku budeme vyhodnocovať miery dvoch z uvedených konštruktov pomocou indexov absolútnej presnosti (AAI) a skreslenia (Bias), ktoré korešpondujú s predpokladaným cieľom študentov - úspešne absolvovať testy priebežného hodnotenia, ktoré im pomáhajú určiť, či sa ich aktuálna úroveň poznania zhoduje s cieľom úspešne absolvovať priebežné hodnotenie predmetu podľa daných kritérií. Naším zámerom je prezentovať vybrané sumárne zistenia týkajúce sa danej problematiky, ktoré vychádzajú a dopĺňujú publikované čiastkové výsledky (Hnatová, Mokriš, Lipták 2019; Hnatová, Mokriš 2019).

3. Základné údaje a otázky výskumného šetrenia

Výskum bol realizovaný počas rokov 2018-2019 na skupinách študentov prvého ročníka bakalárskeho štúdia študijného odboru Učiteľstvo a pedagogické vedy ($N = 654$) na Pedagogickej fakulte Prešovskej univerzity v Prešove. Výskumná vzorka sa kreovala ako dostupná a zámerná, vytváraná študentmi na báze dobrovoľnosti.

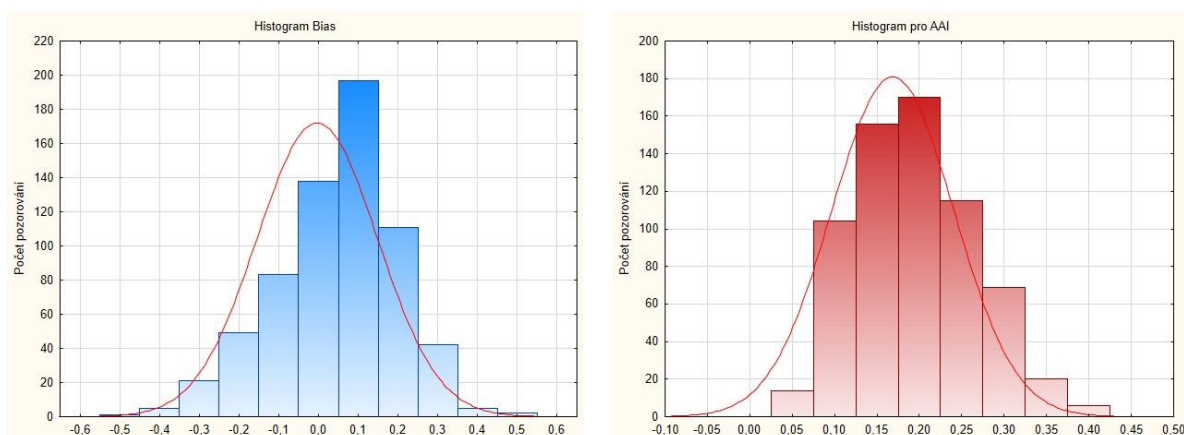
Hľadali sme odpovede na nasledujúce výskumné otázky:

- VO1: Aké skreslenie dosahujú študenti študijného odboru Učiteľstvo a pedagogické vedy medzi subjektívnym a objektívnym hodnotením matematického výkonu?
- VO2: Existuje závislosť medzi skreslím hodnotenia matematického výkonu študentmi študijného odboru Učiteľstvo a pedagogické vedy a výsledným hodnotením študentov v predmete Matematická gramotnosť?
- VO3: Akú presnosť hodnotenia matematického výkonu dosahujú študenti študijného odboru Učiteľstvo a pedagogické vedy?
- VO4: Existuje závislosť medzi presnosťou hodnotenia matematického výkonu študentmi študijného odboru Učiteľstvo a pedagogické vedy a výsledným hodnotením študentov v predmete Matematická gramotnosť?

4. Zber a spracovanie údajov

V priebehu výučby predmetu Matematická gramotnosť, ktorý patrí do korpusu povinných predmetov uvedeného študijného odboru vo všetkých jeho študijných programoch, sa študenti zúčastnili dvoch priebežných hodnotení. Obe boli realizované prezenčne s využitím didaktických testov ako meracích nástrojov (Cronbachovo $\alpha_{PH1} = 0,8368$, Cronbachovo $\alpha_{PH2} = 0,7493$). Testy sa sumárne skladali z 56 položiek, ktoré svojim obsahovým zameraním a početnosťou zastúpenia v 12 tematických oblastiach vychádzali z obsahového a rozsahového zamerania predmetu.

Rozloženia početností údajov oboch indexov vypočítaných podľa vzťahov (tab. 1- riadky (1) a (3)) sú znázornené histogramami (graf 1a a 1b), ktoré naznačujú potrebu pomocou Kolmogorovho-Smirnovovho testu overiť ich zhodu s normálovým rozdelením údajov, keďže Gaussovu krivku (v grafe vyznačenú červenou čiarou) nekopírujú presne.



Graf 1. Histogram Bias indexu (a) a AAI (b)

Na základe výsledkov pre Bias index ($K-S d = 0,06005$, $p < 0,05$) konštatujeme na hladine významnosti $\alpha = 0,05$, že údaje o Bias indexe nepochádzajú z normálneho rozdelenia. Jeho absenciu musíme zohľadniť vo výbere štatistických testov použitých pri následnom spracovaní údajov. Dosahované p -hodnoty pre AAI ($K-S (d) = 0,03878$, $p > 0,20$) nám dovoľujú rozdelenie údajov pre AAI považovať za normálne.

Pri hľadaní odpovede na VO1 bolo potrebné pre každého študenta v každej položke spárovať merania súvisiace s jeho subjektívnou mierou istoty a objektívnym hodnotením výkonu, vypočítať jeho Bias index a vybranú charakteristiku polohy indexu celého výskumného súboru následne porovnať s referenčnou nulovou hodnotou. Pre Bias index predstavuje referenčná hodnota ideálny stav, v ktorom dochádza k absolútnej zhode medzi subjektívnym a objektívnym hodnotením študenta, a teda rozdiel medzi nimi je nulový.

Rovnakým postupom sme zisťovali aj odpoveď na otázku týkajúcu sa dosahovania čo najväčšej presnosti hodnotenia matematického výkonu študentom (VO3). Referenčnou hodnotou pre AAI je ideál absolútnej presnosti, a teda nulovej druhej mocniny rozdielov oboch hodnotení.

V tejto súvislosti formulujeme dve hypotézy testujúce stredné hodnoty sledovaných indexov (mediány $\tilde{x}$ resp. priemery $\bar{x}$) oproti ich nulovým referenčným hodnotám:

$$H_{11}: \tilde{x}(\text{Bias}) \neq 0 \quad \text{vs.} \quad H_{01}: \tilde{x}(\text{Bias}) = 0.$$

$$H_{12}: \bar{x}(\text{AAI}) \neq 0 \quad \text{vs.} \quad H_{02}: \bar{x}(\text{AAI}) = 0.$$

Pri overovaní platnosti nulovej hypotézy H_{01} , s ohľadom na absenciu normálneho rozdelenia súboru údajov, využijeme neparametrický Wilcoxonov test, pri nulovej hypotéze H_{02} použijeme, vzhľadom na dosiahnuté normálne rozdelenie, Studentov t -test. Na hladine významnosti $\alpha = 0,01$ podľa p -hodnôt týchto testov (tab. 2) nezamietame nulovú hypotézu H_{01} a naopak, zamietame nulovú hypotézu H_{02} v prospech jej alternatívnej hypotézy H_{12} . Konštatujeme teda, že kým stredné hodnoty Bias indexu vo výskumnom súbore študentov nadobúdajú ideálne hodnoty, stredné hodnoty AAI sa od ideálneho stavu signifikantne líšia.

Tabuľka 2. Prehľad výsledkov testovania hypotéz H_{01} vs. H_{11} a H_{02} vs. H_{12}

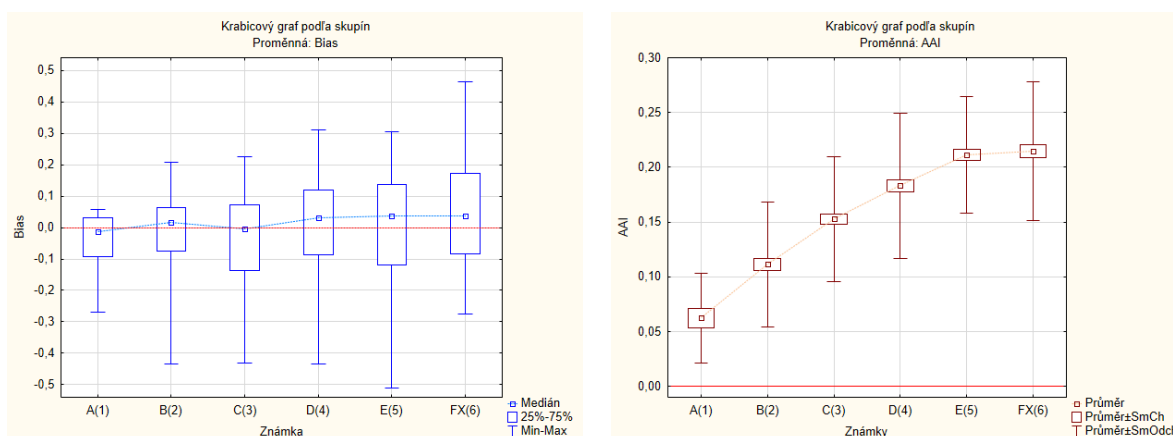
Testovanie hypotéz	Test	p -hodnota
$H_{01}: \tilde{x}(\text{Bias}) = 0$ vs. $H_{11}: \tilde{x}(\text{Bias}) \neq 0$	Wilcoxonov test	0,519338
$H_{02}: \bar{x}(\text{AAI}) = 0$ vs. $H_{12}: \bar{x}(\text{AAI}) \neq 0$	Studentov t -test	0,000000

Zdroj: vlastné spracovanie

Zodpovedanie otázok VO2 a VO4 vyžaduje dekompozíciu uvedených hypotéz, ktorou dokážeme popísať nielen stav, ale aj vývoj hodnôt indexov v smere zavedenej postupnosti

klasifikačných stupňov celkového hodnotenia študentov v predmete. V grafickom znázornení vizualizujeme polohu všetkých stredných hodnôt Bias indexov (graf 2a) a AAI (graf 2b) vo všetkých dosiahnutých klasifikačných stupňoch celkového hodnotenia predmetu a môžeme porovnať ich polohu vzhľadom:

- k nulovým referenčným hodnotám popísanými konštantnou nulovou funkciou, ktorá je na grafe (graf 2) vyznačená priamkami červenej farby,
- k vzájomným polohám stredných hodnôt indexov faktorizovaných dosiahnutým klasifikačným stupňom výsledného hodnotenia predmetu.



Graf 2. Krabicové grafy stredných hodnôt indexov Bias indexu (a) a AAI (b) v jednotlivých klasifikačných stupňoch výsledného hodnotenia predmetu Matematická gramotnosť

Stredné hodnoty Bias indexu skupín študentov hodnotených rôznymi klasifikačnými stupňami sa nachádzajú v blízkosti referenčnej priamky (graf 2a). Testovanie vzájomných zhôd týchto stredných hodnôt je v tomto prípade potrebné realizovať pomocou neparametrického mediánového testu. Pre test vzájomných zhôd mediánov (resp. distribučných funkcií) Bias indexov v jednotlivých klasifikačných stupňoch formulujeme nulovú hypotézu:

$$H0_3: \tilde{x}(Bias_{A(1)}) = \tilde{x}(Bias_{B(2)}) = \tilde{x}(Bias_{C(3)}) = \dots = \tilde{x}(Bias_{FX(6)})$$

oproti alternatívnej hypotéze $H1_3$, že aspoň jeden medián (resp. aspoň jedna distribučná funkcia) sa od iného (resp. inej) navzájom odlišujú. Výsledky mediánového testu ($\chi^2 = 8,942808$ sv = 5 $p = 0,1114$) platnosť nulovej hypotézy nezamietajú, môžeme teda skonštatovať existenciu zhody mediánov Bias indexu naprieč celým spektrom výsledného hodnotenia predmetu.

Stredné hodnoty AAI skupín študentov hodnotených rôznymi klasifikačnými stupňami vizualizujeme krabicovým grafom (graf 2b). Aj v tomto prípade otestujeme platnosť nulovej hypotézy o zhode priemerov indexov AAI v daných klasifikačných stupňoch. Nulová hypotéza má tvar:

$$H0_4: \bar{x}(AAI_{A(1)}) = \bar{x}(AAI_{B(2)}) = \bar{x}(AAI_{C(3)}) = \dots = \bar{x}(AAI_{FX(6)})$$

oproti alternatívnej hypotéze $H1_4$ dovoľujúcej nezgodu aspoň jednej dvojici priemerov z uvedených skupín výsledného hodnotenia študentov.

Analýzou rozptylu ANOVA ($F(5,648) = 64,84$; $p = 0,0000$) nulovú hypotézu zamietame a potvrdzujeme existenciu signifikantných rozdielov, ktoré dourčíme Tukeyovým HSD testom (**Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.**). Z jeho výsledkov vyplýva, že až na priemery indexov AAI v skupinách študentov hodnotených vo výslednom hodnotení klasifikačnými stupňami E a FX, všetky ostatné vykazujú navzájom štatisticky významné rozdiely.

Tabuľka 3. Prehľad signifikantných výsledkov HSD testu priemerov AAI skupín študentov roztriedených podľa dosiahnutých klasifikačných stupňov

AAI	$\bar{x}(AAI_{B(2)})$	$\bar{x}(AAI_{C(3)})$	$\bar{x}(AAI_{D(4)})$	$\bar{x}(AAI_{E(5)})$	$\bar{x}(AAI_{FX(6)})$
$\bar{x}(AAI_{A(1)})$	** 0,006133	** 0,000020	** 0,000020	** 0,000020	** 0,000020
$\bar{x}(AAI_{B(2)})$		** 0,000020	** 0,000020	** 0,000020	** 0,000020
$\bar{x}(AAI_{C(3)})$			** 0,000213	** 0,000020	** 0,000020
$\bar{x}(AAI_{D(4)})$				** 0,005113	** 0,000349
$\bar{x}(AAI_{E(5)})$					0,998257

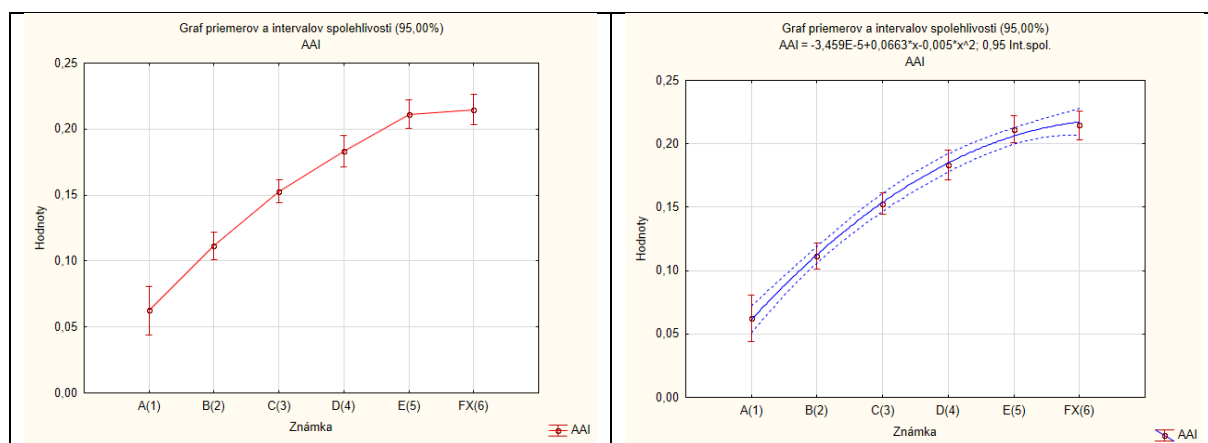
Vysvetlivky:

* signifikantná nezhoda na hladine 0,05,

** signifikantná nezhoda na hladine 0,01.

Zdroj: vlastné spracovanie

Pri modelovaní vývoja stredných hodnôt AAI v smere zavedenej postupnosti klasifikačných stupňov celkového hodnotenia študentov v predmete využijeme GLM (skr. z ang. *Generalized Linear Model*) s polynomicou regresiou, ktorá poskytuje výstup v podobe kvadratického regresného modelu $AAI = -0,005x^2 + 0,0663x - 3,459 \cdot 10^{-5}$ s $R^2 = 0,9877$ (graf 3).



Graf 3. Grafické porovnanie stavu a vývoja AAI v jednotlivých klasifikačných stupňoch výsledného hodnotenia predmetu Matematická gramotnosť

V zhrnutí teda môžeme na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ formulovať čiastkové odpovede na položené výskumné otázky (VO1 až VO4).

Študenti študijného odboru Učiteľstvo a pedagogické vedy po prvom semestri štúdia na vysokej škole dosahujú želaný stav spoľahlivosti hodnotenia svojho matematického výkonu (VO1). Tento nevykazuje žiaden súvis s výsledným hodnotením, ktoré dosiahli v predmete Matematická gramotnosť (VO2). Presnosť, v ponímaní absolútnej presnosti hodnotenia ich matematického výkonu, však po absolvovaní úvodného predmetu z portfólia matematicky orientovaných disciplín ešte dosiahnutá nebola. Pri modelovaní trendu vývoja sa preukazuje kvadratický nárast nepresnosti hodnotenia so zhoršujúcim sa klasifikačným stupňom dosiahnutého výsledného hodnotenia matematického výkonu, pričom záporný kvadratický koeficient $b_2 = -0,005$ spôsobuje znižovanie štatisticky významných rozdielov, avšak iba medzi ostatnou dvojicou skupín študentov, ktorí boli v predmete hodnotení stupňami E a FX. V ostatných skupinách študentov hodnotených rôznymi klasifikačnými stupňami je rozdiel v absolútnej presnosti hodnotenia signifikantne výrazný. Tieto zistenia empiricky dopĺňajú závery metaanalýzy Blacka a Wiliama (1998), ktorí konštatujú silný vplyv formatívneho

hodnotenia na vzdelávanie študentov aj o nami skúmanú špecifickú skupinu študentov – budúcich učiteľov predprimárneho a primárneho stupňa vzdelávania.

5. Limity a obmedzenia

V našom výskumnom súbore nebola v jednom z indexov dosiahnutá normalita rozdelenia údajov aj napriek tomu, že rozdelenie sa v základnom súbore študentov, odvolávajúc na centrálnu limitnú vetu, zvyčajne javí ako normálne (Chráška 2007, s. 67). Je teda dôležité pomenovať skryté faktory, ktoré takémuto rozdeleniu v súbore študentov začínajúcich štúdium na vysokej škole pedagogického zamerania môžu brániť:

- študenti nastupujúci do 1. ročníka bakalárskeho štúdia spravidla neabsolvujú maturitnú skúšku z matematiky, ani žiadnu z jej foriem (externú alebo internú), nakoľko v súčasnosti je výber matematiky ako maturitného predmetu postavený na báze voľiteľnosti (v gymnáziách zo skupiny prírodovedných predmetov) alebo dobrovoľnosti (v ostatných stredných školách),
- prijímacie konanie na VŠ štúdium do týchto študijných programov v súčasnosti nevyžaduje absolvovanie prijímacej skúšky z matematiky alebo jej náhrady,
- predmet Matematická gramotnosť je prvým z predmetov matematickej pregraduálnej prípravy, s ktorým sa študenti v zimnom semestri 1. ročníka svojho štúdia na PF PU stretávajú.

Vedomostná úroveň študentov prichádzajúcich z rôznych typov stredných škôl je rôzna. V prípade existencie (aj závažnejších) problémov v doterajšom štúdiu matematiky si študenti tieto problémy prinášajú so sebou aj na vysokú školu.

Druhým faktorom zatiaľ obmedzujúcim vyhodnotenie ďalších konštruktov metakognitívneho monitorovania je identifikáciu spoľahlivo resp. nespoľahlivo zodpovedanej položky. V prípade použitia dichotomického skórovania je táto identifikácia bezproblémová. Nedichotomické skórovanie však naráža na potrebu stanovenia kritéria správnosti odpovede v prípade položiek s vyšším bodovým skórovaním. Diskusia sa otvára pri úvahách:

- nutnosti jeho fixovania v podobe jednotnej relatívnej miery úspešnosti riešenia každej z položiek (napríklad či bude 80% úspešnosť študenta v riešení každej z položky považovaná za hranicu spoľahlivosti pri posudzovaní odpovede),
- o potrebe jeho dynamizácie zohľadňujúcej výskyt rôznych typov položiek v teste alebo rôznyi počet a váha distraktorov v položke.

6. Záver

Konštatujeme, že u študentov študijného odboru Učiteľstvo a pedagogické vedy, v predmete Matematická gramotnosť, nedochádza ku skresleniu medzi subjektívnym a objektívnym hodnotením matematického výkonu, čo považujeme za potešiteľné. Podľa Hnatovej a Mokriša (2020) ku skresleniu nedochádza ani pri parciálnej časti kurikula predmetu Matematická gramotnosť, ktorá sa zaoberala problematikou nepolyadických číselných sústav. V tejto téme síce študenti dosahujú, v rámci priebežného hodnotenia, požadovanú úspešnosť, avšak s nižšou mierou istoty pri posudzovaní správnosti svojej odpovede. Analýza ostatných sub tém kurikula predmetu je obsahom ďalšieho skúmania. Zároveň sa v širšom kontexte nepotvrdil žiaden súvis skreslenia s výsledným hodnotením študentov, ktoré dosiahli v predmete Matematická gramotnosť.

Pri presnosti hodnotenia konštatujeme, že je možné dosiahnutý stav zlepšovať. Z pohľadu učiteľov musíme svoju pozornosť zamerať na študentov s horším záverečným hodnotením matematického výkonu v predmete, nakoľko títo dosahujú signifikantne významnejšiu nepresnosť v hodnotení.

Jedným z ďalších smerovaní výskumu je aplikácia konštruktov založených na porovnaní výsledkov dosiahnutých pri spoľahlivo a nespoľahlivo hodnotených položkách. Našou ambíciou je použiť index relatívnej presnosti (r), ktorý hodnotí (lineárny) vzťah medzi úsudkami spoľahlivosti a objektívnym hodnotením výkonu podľa daného kritéria. V spoločnej interpretácii budú tieto indexy spolu so skreslením komplexnejšie popisovať konštrukty metakognitívneho monitorovania matematického výkonu študentov.

Literatúra

- Black, P. & D. Wiliam. (1998). Inside the Black Box: Raising Standards through Classroom Assessment. The Phi Delta Kappan [online]. 1998, 80(2), 139-147 [cit. 2020-10-26]. ISSN 00317217.
- Boekaerts, M., & Rozendaal, J.S. (2010). Using multiple calibration indices in order to capture the complex picture of what affects students' accuracy of feeling of confidence. *Learning and Instruction* [online]. 2010, 20(5), 372-382. ISSN 09594752. Dostupné z <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2009.03.002>.
- Hnatová, J. & Mokriš, M. (2019) Sebahodnotenie kognitívneho výkonu študentov predškolskej a elementárnej pedagogiky dosahujúcich rôzne klasifikačné stupne hodnotenia v matematike. *Elementary Mathematics Education Journal*. 2019. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, s. 16 – 26, ISSN 2694-813. Dostupné z http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol1No2/EMEJ_Vol1No2.pdf.
- Hnatová, J. & Mokriš, M. (2020) Sebahodnotenie kognitívneho výkonu študentov predškolskej a elementárnej pedagogiky v téme nepolyadické číselné sústavy. In Nesmorenko, T. & Bernatová, R. (eds) *Osvita i suspil'stvo: mižnarodnyj zbirnyk naukovych prac*. Opole: Wyższa Szkoła Zarządzania i Administracji w Opolu, 2020. s. 41 – 50, ISBN 978-83-66567-00-9. Dostupné z http://pedagogika.wszia.opole.pl/ebook/1_2020.pdf.
- Hnatová, J., Mokriš, M., & Lipták, J. (2019) Študenti predškolskej pedagogiky a ich sebahodnotenie na začiatku profesijnej matematickej prípravy. In Hnatová, J. & Vužňáková, K. (eds) *Premeny školy a učiteľské vzdelávanie v historickom kontexte a nové perspektívy. Zborník príspevkov z vedeckej konferencie s medzinárodnou účasťou organizovanej Pedagogickou fakultou Prešovskej univerzity v Prešove pri príležitosti 70. výročia založenia Pedagogickej fakulty v Prešove*. Prešov: Prešovská univerzita v Prešove, 2019. s.135-141. ISBN 978-80-555-2267-8.
- Chráška, Miroslav. Metódy pedagogického výzkumu: Základy kvantitatívneho výzkumu. Praha: Grada Publishing, 2007. ISBN 978-80-247-1369-4.
- Lindel, K., Lenhart, J., & Schneider W. (2019) Metacognition in Mathematics: Do Different Metacognitive Monitoring Measures Make a Difference? *ZDM: The International Journal on Mathematics Education* [online]. 2019, 51(4), 587-600 [cit. 2020-10-18]. ISSN 18639690. Dostupné z <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-019-01062-8>.
- Maki, R. H., Shields, M., Wheeler A.F. & Zacchilli, T.L. (2005) Individual Differences in Absolute and Relative Metacomprehension Accuracy. *Journal of Educational Psychology* [online]. 2005, 97(4), 723-731 [cit. 2020-10-18]. ISSN 00220663.

- Merritt, R. D. (2019) Teaching Study Skills. Salem Press Encyclopedia [online]. 2019 [cit. 2020-10-18].
- Morphew, J. W. (2020) Changes in metacognitive monitoring accuracy in an introductory physics course. *Metacognition and Learning* [online]. 2020, 1-23 [cit. 2020-10-18]. ISSN 15561623. Dostupné z <https://doi.org/10.1007/s11409-020-09239-3>.
- Nelson, T. O. (1996). Gamma is a measure of the accuracy of predicting performance on one item relative to another item, not the absolute performance on an individual item: comments on Schraw (1995). *Applied Cognitive Psychology*, 10, 257–260. Dostupné z [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-0720\(199606\)10:3<257::AID-ACP400>3.0.CO;2-9](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-0720(199606)10:3<257::AID-ACP400>3.0.CO;2-9).
- Nelson, L. J. & Fyfee, R. (2019) Metacognitive monitoring and help-seeking decisions on mathematical equivalence problems. *Metacognition and Learning* [online]. 2019, 14(2), 167-187 [cit. 2020-10-18]. ISSN 15561623. Dostupné z <https://doi.org/10.1007/s11409-019-09203-w>.
- Schraw, G. (2009) A conceptual analysis of five measures of metacognitive monitoring. *Metacognition and Learning* [online]. 2009, 4(1), 33-45 [cit. 2020-10-18]. ISSN 15561623. Dostupné z <https://doi.org/10.1007/s11409-008-9031-3>.
- Yates, J. F. (1988). Analyzing the accuracy of probability judgments for multiple events: an extension of the covariance decomposition. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 41, 281–299. Dostupné z [https://doi.org/10.1016/0749-5978\(88\)90031-3](https://doi.org/10.1016/0749-5978(88)90031-3).
- Zimmerman, B. J. (2008). Investigating self-regulation and motivation: Historical background, methodological developments, and future prospects. *American Educational Research Journal*, 45, 166–183. Dostupné z <https://doi.org/10.3102/0002831207312909>.

ČÍSELNÉ TROJÚHELNÍKY: POHLED BUDOUCÍCH UČITELŮ NA NETRADIČNÍ ÚLOHY

Eva NOVÁKOVÁ¹, Růžena BLAŽKOVÁ²

¹Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)

²Německé zemské gymnasium, základní škola a mateřská škola (Česká republika)

novakova@ped.muni.cz, blazkova@skolskykomplex.cz

Abstrakt

Príspevek je zaměřený na prezentaci zkušeností, získaných při reflektivní výuce v seminářích z didaktiky matematiky na Pedagogické fakultě MU v Brně. Předmětem našeho zájmu bylo posouzení přístupu budoucích učitelů pro 1. stupeň základní školy k řešení netradičních úloh – číselných trojúhelníků. Ukázalo se, že strategie řešení, použité studenty, byly značně rozdílné: od postupů na úrovni žáků (pokus a omyl) až k pokusům o řešení, využívající sofistikovanější postupy a znalosti osvojené v předchozím matematickém vzdělávání. Společnou reflexi studentských přístupů k řešení a kvalifikovaného posouzení žákovských řešení dokumentovaných videozáznamem považujeme za vhodný podnět k postupnému vytváření jedné stránky profesní identity učitele.

Klíčová slova: reflexe, reflektivní výuka, videozáznam, číselné trojúhelníky, strategie řešení

NUMBER TRIANGLES: A VIEW OF PROSPECTIVE TEACHERS FOR NON-TRADITIONAL TASKS

Abstract

The article presents experience obtained through reflective teaching during the didactics of mathematics' seminars at the Faculty of Education of the Masaryk University in Brno. The authors focused on assessment of the prospective primary school teachers' approach to the solution of non-traditional tasks - number triangles. It has been found out that the solution strategies of students vary significantly, from typical pupils' strategies (trial and error) to solution attempts using more sophisticated elements and knowledge acquired in course of previous mathematical education. The authors consider common reflexion of the students' solution approaches and qualified assessment of pupils' solutions documented by video recording an appropriate impulse for gradual creation of this aspect of the professional identity of the teacher.

Keywords: reflection, reflective teaching, video recording, number triangles, solving strategies

1. Úvod

Matematická a didaktická složka zaujímají v přípravném vzdělávání učitelů pro 1. stupeň základních škol významné postavení, které je odrazem významu a smyslu matematického vzdělávání žáků. Při hledání cest, jak změnit akademický přístup založený pouze na osvojování teoretických poznatků studentů, se v posledních desetiletích prosazuje model reflektivní praxe jako specifického klinického pojetí profesního vzdělávání. V pojetí reflexe, které vychází z konstruktivistické epistemologie (Svojanovský, 2016), je osvojování znalostí zpravidla

spojeno s reflexí praktické zkušenosti v reálném prostředí školské výuky (Korthagen & Vasalos, 2005; Janík et al. 2013). Učitel jako reflektivní praktik jedná aktivně, samostatně, tvořivě a odpovědně v komplexních pedagogických situacích na základě dostatečně hlubokého a širokého poznání edukačních jevů a souvislostí, svých zkušeností, kritické reflexe a sebereflexe. Reflektování předchozí zkušenosti pomáhá učiteli vyhodnocovat efekty vlastních přístupů a objevovat nové cesty, jak přistupovat ke vzdělávání konkrétních dětí, jak s nimi komunikovat s úspěchem a efektivně (Syslová et al., 2018).

2. Teoretický základ

2.1. Reflektivní přístup ve výuce didaktiky matematiky

Reflexi můžeme vymezit jako „proces učení se prostřednictvím zkušeností a ze zkušeností s cílem získání nového porozumění sobě samému a/nebo praxi“ (Píšová et al., 2011, s. 43). Učení ze zkušenosti chápeme jako celostní učení, které zahrnuje jak kognitivní aspekt (myšlení), tak aspekt konativní (jednání) a afektivní (prožívání), jež jsou vzájemně provázány. Diskuse o reflektivně pojatém přípravném vzdělávání učitelů a jeho efektivitě vedly k formulaci nových koncepcí jak na národní (Nezvalová, 2000; Píšová, 2005; Spilková et al., 2015; Švec, 2005), tak mezinárodní úrovni (Korthagen et al., 2011; Kosová & Tomengová et al., 2015; Pollard et al., 2006). V našem pojetí vnímáme uvedený koncept vzdělávání učitelů v souladu s Tomkovou (2018) jako obrat ke studentovi, který mu umožňuje rozvoj celé jeho osobnosti. Hošpesová a Tichá (2007, s. 52) zdůrazňují důležitost reflexe také v přípravě učitelů matematiky. Uvádějí, že reflexe „je klíčovým prvkem v profesním rozvoji studentů učitelství i učitelů působících v praxi. Systematické provádění kvalifikované reflexe jim umožní hlubší pohled na vlastní práci.“

Tento způsob přípravy učitelů rozvíjí také jejich poznatkovou bázi, která je považována za „klíčový aspekt cesty k učitelskému profesionalismu“ (Píšová et al., 2011, s. 53). Janík (2009, s. 15) přijímá Shulmanův (1987) koncept poznatkové báze učitelství (knowledge base for teaching), který vymezuje jako „kodifikovaný nebo kodifikovatelný agregát poznatků, dovedností, porozumění a technologií, etiky a dispozic, kolektivní zodpovědnosti – a současně způsobů, jak je reprezentovat a komunikovat“.

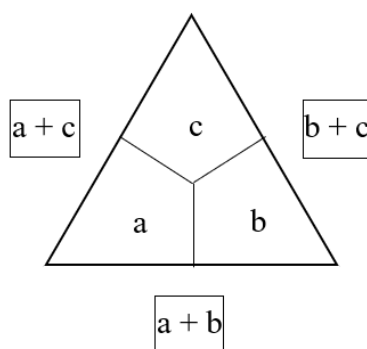
V seminářích předmětu Didaktika matematiky ve studiu učitelství pro 1. stupeň ZŠ na Pedagogické fakultě MU cíleně vytváříme prostor pro analýzu a následnou společnou reflexi úloh, situací a jevů. Pro naši realizaci reflexe je významné využití hospitačního videozáznamu (Najvar et al., 2011). Studenti zde dostávají příležitost k tomu, aby otevřeně a kriticky vyjádřili svůj názor, uplatnili své dosavadní kompetence diagnostické a komunikativní. Smyslem společné detailní analýzy je především to, aby se studenti učili „vidět“ a „pojmenovat“ souvislosti jednotlivých aktivit s osvojováním matematických znalostí. Tím se jim poskytuje určitý vzor pro reflexi vlastní výuky.

Jako vhodná oblast společné reflexe se nabízejí matematické učební úlohy a jejich řešení žáky, neboť jsou považovány za aktuální výzkumná témata didaktiky matematiky a za trvalý předmět zájmu školské praxe (Vondrová et al., 2015). V našem pojetí reflektivní výuky považujeme úlohy a jejich řešení za součást komplexnější výukové situace. Předmětem reflexe jsme učinili úlohy, označované jako „číselné trojúhelníky“. Nejsou ve výuce matematiky obvyklé a vedle rutinních aritmetických výpočtů vyžadují také uplatnění vyšších kognitivních funkcí.

2.2. Číselné trojúhelníky a jejich uplatnění ve výuce

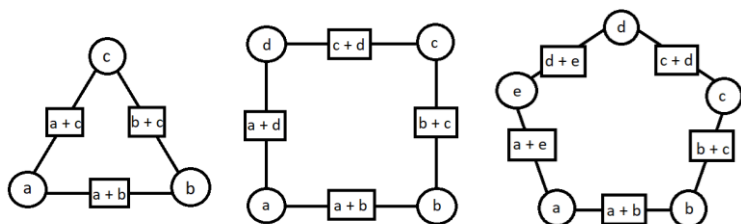
Z hlediska zaměření naší stati považujeme za potřebné zasadit úlohu „číselné trojúhelníky“ (number triangles) do obecnějšího didaktického kontextu. Krauthausen a Schererová (2010) považují číselné trojúhelníky za jedno ze „substantial learning environment“, pro něž je používán český ekvivalent „podnětné výukové prostředí“ (Samková et al., 2015). Wittmann (2001) charakterizuje podnětné výukové prostředí jako výukový celek s následujícími vlastnostmi: představuje ústřední cíle, obsahy a principy výuky matematiky na dané úrovni; týká se významných matematických obsahů, procesů a postupů; je flexibilní a lze ho upravit podle konkrétních podmínek ve třídě; spojuje matematické, psychologické a pedagogické aspekty výuky. Jak připomínají Samková et al. (2015), je podnětné výukové prostředí podmínkou pro uplatnění aktivit, zaměřených na zkoumání a objevování (badatelsky orientované výuky). Využívání podnětných výukových prostředí je rovněž vhodným způsobem, jak docílit „přirozené diferenciací“. Jedná se o takový přístup k problematice heterogenity ve výuce matematiky, kdy diferenciací je vnímána jako něco normálního, dokonce v některých aspektech přínosného. „*Podstatné je, že všichni žáci ve třídě mohou současně pracovat na stejném obsahu, řešit stejnou úlohu a to na různých úrovních podle svých schopností*“ (Tichá, 2010, s. 299).

Číselný trojúhelník se skládá ze tří vnitřních a tří částí vnějšího pole, přiléhajících k jednotlivým stranám trojúhelníku. V každém z částí pole je zapsáno jedno přirozené číslo, popřípadě určitý počet symbolů zastupujících přirozená čísla (písmena a , b , c). Přitom vždy platí pravidlo, že v každé části vnějšího pole je zapsán výsledek součtu dvou čísel (počtu symbolů) z přilehlých vnitřních polí (obr. 1)¹.



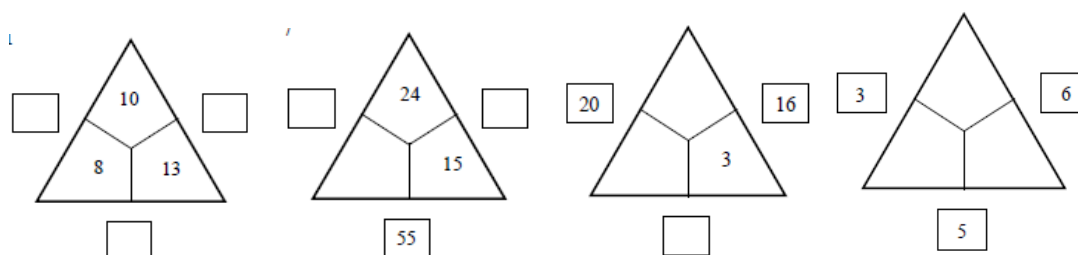
Obrázek 1. Číselný trojúhelník - zápis pravidla pro součet sousedních polí.

¹ Na podobném principu je založen tzv. *arithmagon* nebo *arithmogon* (Mason, J., Burton, L., & Stacey, K., 2010; Wittmann, E.C., 2001). Arithmagon se však zaměřuje na operace s čísly ve vrcholech trojúhelníků, čtverců nebo pětiúhelníků. Wittmann (2001) na souvislost číselných trojúhelníků s arithmagony odkazuje, ale zdůrazňuje, že každé z těchto prostředí směřuje k jiným cílům.



Číselné trojúhelníky mohou být zadány ve čtyřech podobách různé (graduující) obtížnosti. V základním číselném trojúhelníku jsou zadána všechna tři čísla ve vnitřních polích (typ *a*). Pro vyplnění zbylých polí stačí provést v libovolném pořadí tři součty.

Druhým typem je trojúhelník se dvěma zadanými čísly ve vnitřních polích a jedním ve vnějším poli (typ *b*). V trojúhelníku třetího typu je zadáno jedno číslo ve vnitřním poli a dvě čísla v poli vnějším (typ *c*). V těchto trojúhelnících je třeba pro výpočet čísel v dalších polích použít jak sčítání, tak odčítání. Zároveň již není pořadí jednotlivých operací zcela libovolné, v některých případech je dokonce možný pouze jeden postup řešení. Tyto tři typy číselných trojúhelníků lze řešit výpočty bez uplatnění badatelské řešitelské strategie. Jsou tedy vhodné pro seznámení žáků s prostředím číselných trojúhelníků a pochopení jejich základních principů.



Obrázek 2. Číselné trojúhelníky typu *a*), *b*), *c*), *d*).

Nejobtížnějším typem je trojúhelník, ve kterém jsou zadána tři čísla v částech vnějšího pole (typ *d*). Pro určení čísel ve vnitřních polích nestačí pouhé rutinní výpočty. Žáci k jejich určení mohou zvolit různé metody – metoda „pokus-omyl“, systematické dosazování čísel nebo objevení nové strategie řešení s využitím vlastností číselného trojúhelníku.

3. Popis reflexe a autentické výpovědi studentů²

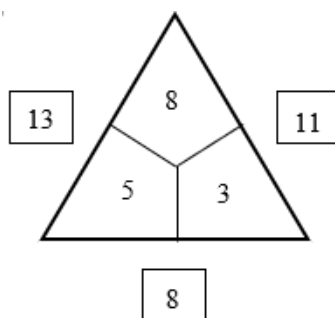
Data uvedená v příspěvku jsme získali při použití reflektivní analýzy studentských řešení. Zaměřili jsme se na hledání odpovědi na dvě otázky:

- 1) Jaké řešitelské strategie použijí studenti učitelství pro 1. stupeň ZŠ při řešení různých typů číselných trojúhelníků?
- 2) Jak přijímají studenti úlohy uvedeného typu z hlediska jejich potencionálního využití ve vlastní výuce?

Reflektivní výuka proběhla v semináři z didaktiky matematiky v prosinci 2019 ve skupině 28 studentů 3. ročníku oboru učitelství pro 1. stupeň ZŠ na Pedagogické fakultě MU v Brně.

Výchozím krokem reflektivní aktivity bylo seznámení studentů s prostředím číselných trojúhelníků. Ukázalo se, že tento typ netradiční úlohy je pro ně zcela neznámý, na předcházejících stupních vzdělávání se s ním nesetkali. Těžiště práce spočívalo v řešení vybraných číselných trojúhelníků, které byly studentům zadány ve stejné podobě jako žákům 5. ročníku ZŠ (Blažková, 2020). Aktivitu řídila spolu s vyučujícím spoluautorka příspěvku Růžena, která na videozáznamu demonstrovala ukázky z vlastní výuky. Načrtla na tabuli číselný trojúhelník, doplnila do vnitřních a do částí vnějšího pole příslušná čísla.

² V článku jsou použity ukázky a citace z diplomové práce spoluautorky článku R. Blažkové: *Číselné trojúhelníky jako příležitost k uplatnění badatelské výuky*. Brno: Pedagogická fakulta MU, 2020.



Obrázek 3. Úvodní ukázka vyřešeného číselného trojúhelníku typu a).

Studenti se pokoušeli objevit pravidlo, podle kterého jsou čísla v trojúhelníku umístěna. Svůj „objev“ formulovali různě:

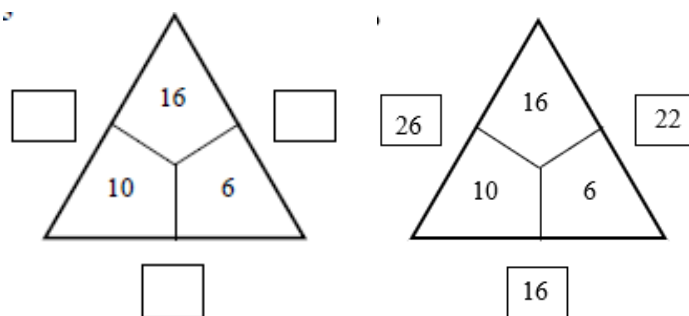
„Je tam asi nějaké pravidlo sčítání. To číslo, které náleží ke straně trojúhelníku, tak se... ta čísla na té straně se sčítají.“

„Sečtou se dvě čísla, která jsou nad sebou nebo vedle sebe. 5 plus 3 je 8, 5 plus 8 je 13, 3 plus 8 je 11.“

Při řešení trojúhelníků typu a) a b) nebyly zaznamenány problémy či neúspěšná řešení, pouze formulace obecného postupu řešení se poněkud lišily:

„Sečetla jsem vždy dvě vnitřní vedlejší strany a výsledek napsala do vnějšího pole.“

„Postupně jsem sčítala vnitřní sousedící pole trojúhelníku a výsledky postupně zapisovala do přilehlého vnějšího pole strany trojúhelníku.“



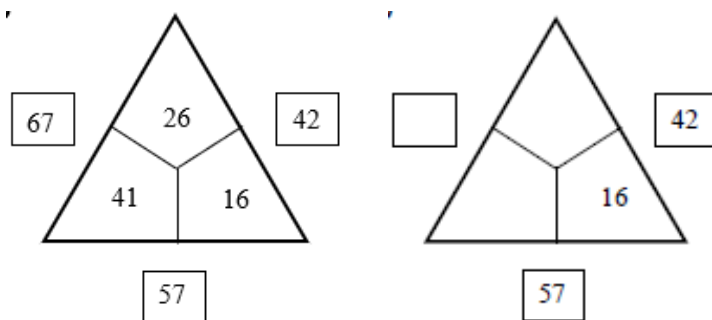
Obrázek 4. Ukázka řešení trojúhelníku typu a).

Řešení trojúhelníku typu c) se ukázalo obtížnější. Studenti uváděli nejčastěji postup řešení, který se opíral o konkrétní zadaná čísla:

„ $42 - 16 = 26$ (číslo v horním vnitřním poli); $57 - 16 = 41$ (poslední chybějící číslo ve vnitřním poli); $26 + 41 = 67$ (číslo ve zbývajícím vnějším poli).“

Obecný postup byl v tomto případě studentkou vyjádřen tímto způsobem:

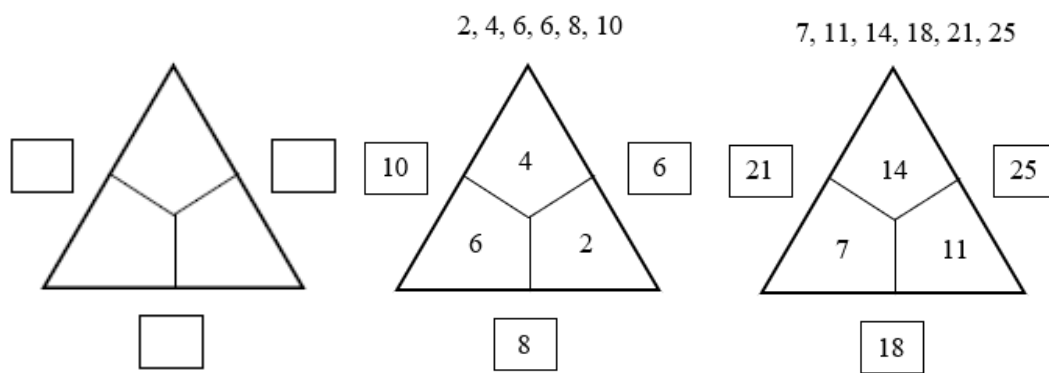
„Odečtení známého čísla v trojúhelníku od výsledku nad stranou; doplnění výsledku do trojúhelníku, zpětná kontrola; výpočet dolní části + kontrola, výpočet levé části.“



Obrázek 5. Ukázka řešení trojúhelníku typu c).

Další úloha byla zadána takto:

Doplň do trojúhelníku čísla, která jsou nad ním napsaná. Použij všechna čísla.



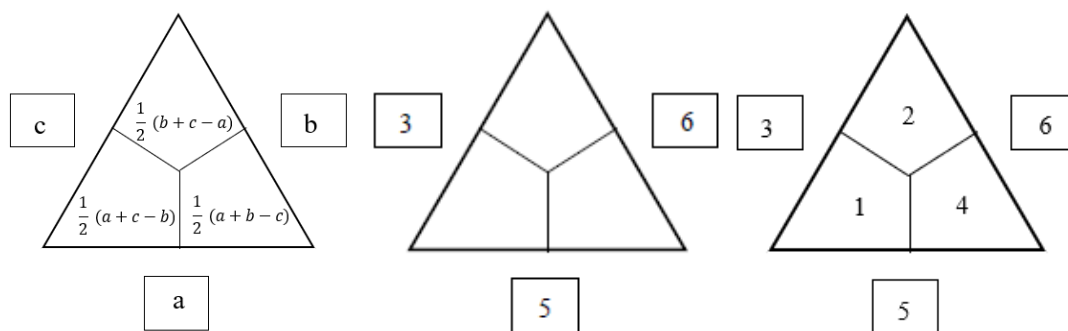
Obrázek 6. Doplnění zadaných čísel do trojúhelníku.

Studenti své úvahy formulovali například takto:

„Jako první vezmeme ta dvě nejmenší čísla, sečteme je, škrtneme ten součet i ta dvě čísla. Pak vezmeme nejmenší číslo, které tam zbylo, a sečteme to. A tak mi to vždycky vyjde.“

Další krok byl zaměřen na odhalení a obecnější popis vztahu mezi vnitřními a vnějšími čísly trojúhelníků. Pokud označíme vnitřní čísla trojúhelníku a , b , c (obr. 1), můžeme říci, že součet vnitřních čísel je $a + b + c$. Z obrázku 1 též vyplývá, že součet vnějších čísel je $(a + b) + (b + c) + (a + c) = 2(a + b + c)$. Odtud plyne, že součet vnějších čísel je dvojnásobkem součtu vnitřních čísel. Uvedený poznatek lze využít při řešení trojúhelníku d).

Pokud nyní označíme písmeny a , b a c vnější čísla, můžeme vnitřní číslo v horním poli vyjádřit jako rozdíl $\frac{a+b+c}{2} - a$. Z předchozí úvahy totiž víme, že součet vnitřních čísel je roven polovině ze součtu všech tří vnějších čísel, a vnější číslo a představuje součet dvou zbylých vnitřních čísel. Proto je vnitřní číslo v horním poli $x = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{1}{2}(b + c - a)$. Obdobně lze určit i zbylá dvě vnitřní čísla (obr. 7).



Obrázek 7. Výpočet vnitřních čísel ze zadaných vnějších čísel v trojúhelníku typu d).

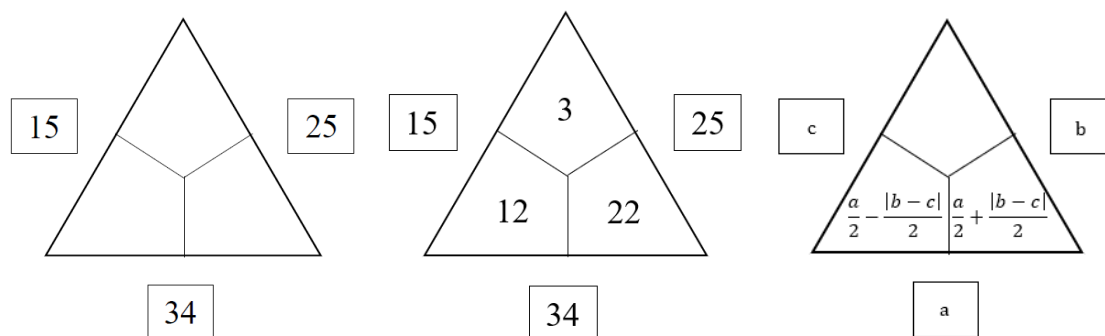
Některé autentické studentské odpovědi na otázku, jakou metodu použili při hledání vnitřních čísel (obr. 8):

„Metodou pokus-omyl, rozdělila jsem 34 na 17 a 17, a pak jsem na jedné straně přidávala a na druhé ubírala podle toho, jak mi to vycházelo.“

Jiná studentka tento postup upřesnila a popsala jednoduchý postup, jak řešit trojúhelníky se třemi vnějšími čísly:

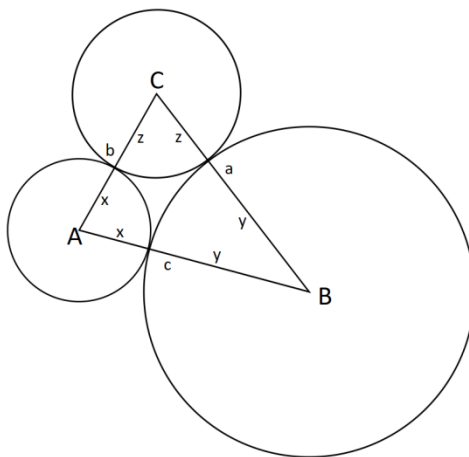
„Vždy jsem spodní číslo vydělila 2 a poté si odečetla rozdíl čísel na stranách a podle toho upravila polovinu spodního čísla.“

Toto tvrzení bylo doplněno výpočty potřebnými k vyřešení trojúhelníku na obrázku 8: „ $34:2=17$; $25-15=10$; $10:2=5$; $17-5=12$; $17+5=22$ “.



Obrázek 8. Řešení trojúhelníku se třemi zadanými vnějšími čísly.

Rozsah příspěvku neumožňuje uvést všechny etapy práce s číselnými trojúhelníky, které byly v průběhu semináře realizovány a reflektovány. Například byla diskutována souvislost aritmetického a geometrického pohledu na číselné trojúhelníky, jak ji prezentuje Wittmann (2001), a kterou jsme využili při obecném řešení trojúhelníku typu d). Autor uvádí, že matematická podstata číselných trojúhelníků vychází z následujícího geometrického problému: *Je dán trojúhelník ABC. Sestrojte tři kružnice se středy ve vrcholech tohoto trojúhelníku, pro které platí, že každé dvě kružnice mají vždy právě jeden bod dotyku.*



Obrázek 9. Geometrická interpretace číselného trojúhelníku.

Z obrázku 9 vyplývá, že $x + y = c$, $y + z = a$, $x + z = b$. Proto je $c + a = (x + y) + (y + z) = (x + z) + 2y = b + 2y$ a tudíž $y = \frac{1}{2}(c + a - b)$. Stejně tak platí, že $x = \frac{1}{2}(b + c - a)$ a $z = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

Studenty zaujala také otázka počtu řešení trojúhelníků se zadanými čísly (více než jeden postup řešení, neřešitelné trojúhelníky), diskuse o tom, kdy mohou být vnitřní a vnější čísla lichá a sudá. Domníváme se, že i z uvedeného je zřejmý významný motivační potenciál prostředí číselných trojúhelníků.

4. Shrnutí, diskuse a závěry

Zkušenosti z využívání reflektivní analýzy zaměřené na studentský přístup k netradičním úlohám, s nimiž se dosud ve školním vzdělávání v roli žáka nesetkali, přinesly některé podněty, které se pokusíme shrnout a odpovědět na otázky, které jsme si položili.

Postupy, které studenti při vlastním řešení použili, byly velmi rozmanité. Nebylo smyslem vlastní reflexe ani tohoto článku je blíže kvantifikovat. Bylo však zřejmé, že převážně postupovali v intencích možností žáků páté třídy: metodou pokus – omyl, bez hlubšího zdůvodnění a patřičné argumentace. Pouze výjimečně bylo možno zaznamenat sofistikovanější postupy a znalosti osvojené v předchozím matematickém vzdělávání. Potvrdila se tím naše zkušenost, kterou jsme zaznamenali při analýze studentských řešení nestandardních úloh již v minulém období (Nováková, 2019).

Studenty aktivita plně zaujala, diskuse se vedle hledání vlastního řešení jednotlivých typů trojúhelníků zaměřovala především na to, zda a v jaké podobě bude možné úlohy využít v praxi výuky ve vyšších ročnících 1. stupně základní školy.

Z autentických názorů studentů:

„Mně se to líbí, protože jsem nad tím i já musela přemýšlet a myslím, že to ty děti rozvíjí. Je to úplně jiný typ příkladů, než na jaký jsou zvyklí z učebnic.“

„Mě překvapilo, kolik se toho dá s tím jedním trojúhelníkem zvládnout.“

„Přišlo mi super, že jsou tam nejdřív lehčí příklady, pak těžší a pak zase lehčí. Zase se tam nevyužívá tolik přechod přes desítku, ale jsou tam ty základní počty. Takže je to i pro slabší žáky motivující.“

„Rozvíjí to kreativitu dětí. Někteří v tom hledají systém, jiní řeší metodou pokus-omyl.“

„Mně přijde, že žáci se můžou cítit svobodnější. Je super, že nejsou uzavřeni do určitého postupu.“

„Určitě by to šlo využít pro ty šikovnější ve třídě nebo pro ty, kteří tu běžnou látku zvládají s přehledem.“

„Je to vhodné pro všechny žáky. Ti slabší zůstanou jen u počítání a ti šikovnější pak můžou hledat ten systém a důkazy.“

Na rozdíl od spontánního přijetí prostředí číselných trojúhelníků studenty učitelství byly názory učitelů pátých tříd, ve kterých diplomantka Růžena „experimentální výuku“ realizovala, poněkud různorodé:

„Nemůžu přece věnovat hodiny výuky na to, aby si žáci pracovali po svém a povídali si, aniž bychom se posunuli v učivu.“

„Žáky je nutné motivovat známkami nebo pochvalou před spolužáky a odměnou, jinak jejich snaha polevuje.“

„Žáci mě mile překvapili svou schopností vést diskuzi a argumentovat. Abstraktnější závěry byli schopni vyvodit jen žáci, kteří se hlásí na víceletá gymnázia.“

„U některých žáků jsem nečekala takovou aktivitu a zápal.“

Prostřednictvím řešení a bližšího „zkoumání“ vybraných úloh z prostředí číselných trojúhelníků jsme se pokusili angažovat studenty do uvažování o sobě, o své připravenosti k efektivní výuce matematiky. Podstatnou se jeví konfrontace studentských pohledů na úlohy s videozáznamem vybraných sekvencí řešení žáků v reálném prostředí výuky. Změnu pohledu studenta na řešení úloh určených pro žáky 1. stupně ZŠ považujeme za jeden z elementů konstrukce profesní identity učitele, jeho profesního přesvědčení (Pajares, 1992). Budoucí učitel již není pouhým řešitelem úlohy, jehož cílem je úlohu (co nejrychleji a podle požadavků svého učitele) vyřešit. Proces budování individuální identity učitele, do něhož se promítá také přesvědčení o připravenosti studenta k řízení učební činnosti žáků při řešení úloh (Dofková, 2016), je však v didakticky zaměřených předmětech studia teprve nastartován.

Literatura

- Blažková, R. (2020). Číselné trojúhelníky jako příležitost k uplatnění badatelské výuky. *Diplomová práce*. Brno: Pedagogická fakulta MU.
- Dofková, R. (2016). *Přesvědčení o připravenosti budoucích učitelů matematiky jako didaktická výzva primárního vzdělávání*. Olomouc: Univerzita Palackého.
- Hošpesová, A., & Tichá, M. (2007). Kvalifikovaná pedagogická reflexe – cesta ke zlepšení kultury vyučování. In A. Hošpesová, N. Stehlíková, M. Tichá (Eds.), *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice* (49–80). České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.
- Janík, T. (2009). *Didaktické znalosti obsahu a jejich význam pro oborové didaktiky, tvorbu kurikula a učitelské vzdělávání*. Brno: Paido.
- Janík, T., Slavík, J., Mužík, V., Trna, J., Janko, T., Lokajíčková, V., ... & Zlatníček, P. (2013). *Kvalita (ve) vzdělávání: obsahově zaměřený přístup ke zkoumání a zlepšování výuky*. Brno: Masarykova univerzita.
- Korthagen, F. (2011). *Jak spojit praxi s teorií: didaktika realistického vzdělávání učitelů*. Brno: Paido.
- Korthagen, F. A., & Vasalos, A. (2005). Levels in reflection: core reflection as a means to enhance professional growth. *Teachers and Teaching: theory and practice*, 11(1), 47–71.

- Kosová, B., & Tomengová, A., et al. (2015). *Profesijná praktická príprava budúcich učiteľov*. Banská Bystrica: Belianum.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically*. Harlow: Pearson Education.
- Najvar, P., Najvarová, V., Janík, T., & Šebestová, S. (2011). *Videostudie v pedagogickém výzkumu*. Brno: Paido.
- Nezvalová, D. (2000). *Některé trendy v pregraduální přípravě učitelů*. Olomouc: Univerzita Palackého.
- Nováková, E. (2019). Matematické učební úlohy očima studentů učitelství pro 1. stupeň ZŠ. *Elementary Mathematics Education Journal*, 1(1), 72–82.
- Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307–332.
- Píšová, M. (2005). *Klinický rok: Procesy profesního rozvoje studentů učitelství a jejich podpora*. Pardubice: Univerzita Pardubice.
- Píšová, M., Najvar, P., Janík, T., Hanušová, S., Kostková, K., Janíková, V., Tůma, F., & Zerková, J. (2011). *Teorie a výzkum expertnosti učitelské profese*. Brno: MuniPress.
- Pollard, A., Collins, J., Maddock, M., Simco, N., Swaffield, S., Warin, J., & Warwick, P. (2006). *Reflective teaching: Evidence-informed professional practice*. London: Continuum.
- Samková, L., Hošpesová, A., Roubíček, F., & Tichá, M. (2015). Badatelsky orientované vyučování matematice. *Scientia in educatione*, 6(1), 91–122.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, 57(1), 1–23.
- Spilková, V., Tomková, A., Mazáčová, N., & Kargerová, J. (2015). *Klinická škola a její role ve vzdělávání učitelů*. Praha: Retida.
- Švec, V. (2005). Sebereflexe jako nástroj profesionálního (sebe)rozvíjení začínajících učitelů. *Pedagogická orientace*, 7(3), 2–13.
- Svojanovský, P. (2016). Podpora reflexe studentů učitelství perspektivou jejich vzdělavatelů. In V. Švec, P. Svojanovský, & B. Pravdová (Eds.), *Determinanty účinnosti učitelských praxí* (45–76). Brno: Masarykova univerzita.
- Syslová, Z., Píšová M., Rodová, V., Černá, M., Grůzová, L., Nováková, E., & Stadlerová, H. (2018). *Podpora tvorby profesního portfolia v přípravném vzdělávání učitelů mateřských a 1. stupně základních škol*. Brno: MU.
- Tichá, M. (2010). Podnětná výuková prostředí pro přirozenou diferenciaci. In M. Uhlířová (Ed.) *Matematika 4. Matematické vzdělávání v kontextu proměn primární školy*. Olomouc: Univerzita Palackého.
- Tomková, A. (2018). *Portfolio v perspektivě reflektivně pojatého vzdělávání učitelů*. Praha: Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy.
- Vondrová, N., Rendl, M., Havlíčková, R., Hříbková, L., Páchová, A., & Žalská, J. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Praha: Karolinum.
- Wittmann, E. C. (2001). Developing Mathematics Education in a Systemic Process. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 1–20.

DIVISIBILITY AND MS EXCEL

Karel PASTOR

Palacký University Olomouc, Faculty of Education (Czech Republic)

karel.pastor@upol.cz

Abstract

Divisibility plays a crucial role in arithmetic, number theory and modular arithmetic. The orientation in the divisibility is needed to solve many tasks from everyday life. Thus, divisibility is an important part of mathematics curriculum. Children are beginning to get acquainted with the basic concepts and principles of divisibility since the age of 8. It seems that the teaching of divisibility can be interesting when using MS Excel. In this way, we can also increase pupils' digital literacy. In our paper, we will focus on possibilities of using the MOD function in MS Excel. We will solve some word problems.

Keywords: divisibility, modular arithmetic, MS Excel, word problems.

1. Introduction

Divisibility is an important part of mathematics curriculum. Pupils are beginning to get acquainted with the basic concepts and principles of divisibility since the age of 8. Children of elementary school know that a (concrete) natural number a divides a (concrete) natural number b , if there is a (concrete) natural number c such that $b = a \cdot c$. They also know how to find, for two (concrete) natural numbers a and b , the quotient q and the remainder r such that $b = a \cdot q + r$. Pupils become acquainted with concepts such as the greatest common divisor or the least common multiple at the age of 12, but at the age 8-11 they prepare for it.

Using MS Excel to solve some examples can make the divisibility learning more attractive. In MS Excel, concerning divisibility, we can use the following functions ("Excel function guide").

- MOD function: returns the remainder after division (returns the remainder after the first number is divided by a divisor). For example MOD(18;5) returns 3 or MOD(2020;37) returns 22.
- GCD function: returns the greatest common divisor of two or more natural numbers. We recall that the greatest common divisor is the largest positive integer which divides all supposed natural numbers. For example, MOD(16;28) returns 4 or MOD(7;33) returns 1 or MOD(72;360;108) returns 36.
- LCM function: returns the least common multiple of two or more natural numbers. We recall that the least common multiple is the smallest positive integer which is a multiple of all supposed natural numbers. For example, LCM(12;8) returns 24 or LCM(7;13) returns 91 or LCM(1348;1415;2020) returns 192 649 420.

For teaching divisibility of pupils aged 8-11 we can use the MOD function above all. In our paper, we will show some examples of word problems that can be solved by means of the MOD function. We will use also the next functions in MS Excel ("Excel function guide").

- IF function: returns one value if the condition is true, or another value if the condition is false. For example, $\text{IF}(\text{MOD}(72;8)=0;1;0)$ returns 1 because the number 8 divides the number 72. On the other hand $\text{IF}(\text{MOD}(22;3)=0;1;0)$ returns 0 because the number 3 does not divide the number 22.
- INT function: returns the integer part of a decimal number by rounding down to the integer. For example, $\text{INT}(2,85)$ returns 2 or $\text{INT}(29/7)$ returns 4.

2. Word problems

In this section, we will show how we can solve some word problems concerning divisibility using MS Excel. The given examples were solved in ("Divisibility – math word problems") using procedures with which pupils aged 8-11 are usually unfamiliar (such as finding the least common multiple using prime factorization).

Example 1 ("Divisibility – math word problems", Example 4).

Paľo, Jano, Karol, and Rišo were doing an intelligence test. Paľo correctly answered half of the questions plus 7 questions, Jano to one third plus 18 questions, Karol to one quarter plus 21 questions and Rišo to one fifth plus 25 questions.

After the test, Karol said: "I feel like I did quite well. I don't know how many questions were in the test, but the number of them was less than or equal to 100. How many questions were in the test?"

What was the name of the boy who had the most correct answers? How many correct answers did he have?

Solution. It follows from the text of word problem that the number of questions is greater than 25 and less than or equal to 100. We also know that the number of questions is divisible by 2, 3, 4 and 5. Now, we can use MS Excel as it is shown in Tables 1 and 2.

Table 1. Example 1, used functions in MS Excel.

	A	B	C	D	E	F
1	26	=MOD(A1;2)	=MOD(A1;3)	=MOD(A1;4)	=MOD(A1;5)	=IF(B1+C1+D1+E1=0;"YES";"NO")
2	27	=MOD(A2;2)	=MOD(A2;3)	=MOD(A2;4)	=MOD(A2;5)	=IF(B2+C2+D2+E2=0;"YES";"NO")
3	28	=MOD(A3;2)	=MOD(A3;3)	=MOD(A3;4)	=MOD(A3;5)	=IF(B3+C3+D3+E3=0;"YES";"NO")
4	29	=MOD(A4;2)	=MOD(A4;3)	=MOD(A4;4)	=MOD(A4;5)	=IF(B4+C4+D4+E4=0;"YES";"NO")
5	30	=MOD(A5;2)	=MOD(A5;3)	=MOD(A5;4)	=MOD(A5;5)	=IF(B5+C5+D5+E5=0;"YES";"NO")
6	31	=MOD(A6;2)	=MOD(A6;3)	=MOD(A6;4)	=MOD(A6;5)	=IF(B6+C6+D6+E6=0;"YES";"NO")
7	32	=MOD(A7;2)	=MOD(A7;3)	=MOD(A7;4)	=MOD(A7;5)	=IF(B7+C7+D7+E7=0;"YES";"NO")
8	33	=MOD(A8;2)	=MOD(A8;3)	=MOD(A8;4)	=MOD(A8;5)	=IF(B8+C8+D8+E8=0;"YES";"NO")
.	.	.	.	.	.	.
32	57	=MOD(A32;2)	=MOD(A32;3)	=MOD(A32;4)	=MOD(A32;5)	=IF(B32+C32+D32+E32=0;"YES";"NO")
33	58	=MOD(A33;2)	=MOD(A33;3)	=MOD(A33;4)	=MOD(A33;5)	=IF(B33+C33+D33+E33=0;"YES";"NO")
34	59	=MOD(A34;2)	=MOD(A34;3)	=MOD(A34;4)	=MOD(A34;5)	=IF(B34+C34+D34+E34=0;"YES";"NO")
35	60	=MOD(A35;2)	=MOD(A35;3)	=MOD(A35;4)	=MOD(A35;5)	=IF(B35+C35+D35+E35=0;"YES";"NO")
36	61	=MOD(A36;2)	=MOD(A36;3)	=MOD(A36;4)	=MOD(A36;5)	=IF(B36+C36+D36+E36=0;"YES";"NO")
37	62	=MOD(A37;2)	=MOD(A37;3)	=MOD(A37;4)	=MOD(A37;5)	=IF(B37+C37+D37+E37=0;"YES";"NO")
38	63	=MOD(A38;2)	=MOD(A38;3)	=MOD(A38;4)	=MOD(A38;5)	=IF(B38+C38+D38+E38=0;"YES";"NO")
.	.	.	.	.	.	.
73	98	=MOD(A73;2)	=MOD(A73;3)	=MOD(A73;4)	=MOD(A73;5)	=IF(B73+C73+D73+E73=0;"YES";"NO")
74	99	=MOD(A74;2)	=MOD(A74;3)	=MOD(A74;4)	=MOD(A74;5)	=IF(B74+C74+D74+E74=0;"YES";"NO")
75	100	=MOD(A75;2)	=MOD(A75;3)	=MOD(A75;4)	=MOD(A75;5)	=IF(B75+C75+D75+E75=0;"YES";"NO")

Table 2. Example 1, results in MS Excel.

	A	B	C	D	E	F
1	26	0	2	2	1	NO
2	27	1	0	3	2	NO
3	28	0	1	0	3	NO
4	29	1	2	1	4	NO
5	30	0	0	2	0	NO
6	31	1	1	3	1	NO
7	32	0	2	0	2	NO
8	33	1	0	1	3	NO
.	.	.	.	.	.	.
32	57	1	0	1	2	NO
33	58	0	1	2	3	NO
34	59	1	2	3	4	NO
35	60	0	0	0	0	YES
36	61	1	1	1	1	NO
37	62	0	2	2	2	NO
38	63	1	0	3	3	NO
.	.	.	.	.	.	.
73	98	0	2	2	3	NO
74	99	1	0	3	4	NO
75	100	0	1	0	0	NO

Table 2 gives that there were 60 questions in the test. We can easily calculate that Pal'o answered correctly $\frac{1}{2} \cdot 60 + 7 = 37$ questiones, Jano answered correctly $\frac{1}{3} \cdot 60 + 18 = 38$ questions, Karol answered correctly $\frac{1}{4} \cdot 60 + 21 = 36$ and Rišo answered correctly $\frac{1}{5} \cdot 60 + 25 = 37$. Thus, the name of the boy who had the most correct answers is Jano.

Pupils may notice that if 4 divides a number, then 2 divides this number too. Thus, the column B in Tables 1 and 2 can be omitted.

Example 2. ("Divisibility – math word problems", Example 4).

How many are two-digit natural numbers that have the sum of the digits 9?

Solution. We can use Excel functions INT, MOD and IF, see Tables 3 and 4.

Table 3. Example 2, used functions in MS Excel.

	A	B	C	D	E
1	10	=INT(A1/10)	=MOD(A1;10)	=B1+C1	IF(D1=9; "YES";"NO")
2	11	=INT(A2/10)	=MOD(A2;10)	=B2+C2	IF(D2=9; "YES";"NO")
3	12	=INT(A3/10)	=MOD(A3;10)	=B3+C3	IF(D3=9; "YES";"NO")
4	13	=INT(A4/10)	=MOD(A4;10)	=B4+C4	IF(D4=9; "YES";"NO")
5	14	=INT(A5/10)	=MOD(A5;10)	=B5+C5	IF(D5=9; "YES";"NO")
6	15	=INT(A6/10)	=MOD(A6;10)	=B6+C6	IF(D6=9; "YES";"NO")
7	16	=INT(A7/10)	=MOD(A7;10)	=B7+C7	IF(D7=9; "YES";"NO")
8	17	=INT(A8/10)	=MOD(A8;10)	=B8+C8	IF(D8=9; "YES";"NO")
9	18	=INT(A9/10)	=MOD(A9;10)	=B9+C9	IF(D9=9; "YES";"NO")
.	.	.	.	.	.
87	96	=INT(A87/10)	=MOD(A87;10)	=B87+C87	IF(D87=9; "YES";"NO")
88	97	=INT(A88/10)	=MOD(A88;10)	=B88+C88	IF(D88=9; "YES";"NO")
89	98	=INT(A89/10)	=MOD(A89;10)	=B89+C89	IF(D89=9; "YES";"NO")
90	99	=INT(A90/10)	=MOD(A90;10)	=B90+C90	IF(D90=9; "YES";"NO")

Table 4. Example 2, results in MS Excel.

	A	B	C	D	E
1	10	1	0	1	NO
2	11	1	1	2	NO
3	12	1	2	3	NO
4	13	1	3	4	NO
5	14	1	4	5	NO
6	15	1	5	6	NO
7	16	1	6	7	NO
8	17	1	7	8	NO
9	18	1	8	9	YES
10	19	1	9	10	NO
.	.	.	.	.	.
18	27	2	7	9	YES
19	28	2	8	10	NO
.	.	.	.	.	.
27	36	3	6	9	YES
28	37	3	7	10	NO
.	.	.	.	.	.
36	45	4	5	9	YES
37	46	4	6	10	NO
.	.	.	.	.	.
45	54	5	4	9	YES
46	55	5	5	10	NO
.	.	.	.	.	.
54	63	6	3	9	YES
55	64	6	4	10	NO
.	.	.	.	.	.
63	72	7	2	9	YES
64	73	7	3	10	NO
.	.	.	.	.	.
72	81	8	1	9	YES
73	82	8	2	10	NO
.	.	.	.	.	.
81	90	9	0	9	YES
82	91	9	1	10	NO
.	.	.	.	.	.
90	99	9	9	18	NO

Using Table 4, we can answer that there are 9 two-digit natural numbers that have the sum of the digits 9: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 and 90. Pupils may notice that the column D can be omitted if we use the formula =IF(B1+C1=9;"YES";"NO") in the last column.

Example 3. ("Divisibility – math word problems", Example 16).

The dance group formed groups of 4, 5, and 6 members. Always one dancer remained. How many dancers could there in the whole group?

Solution. The number of dancers is greater than or equal to 7. We are looking for the smallest number for which the remainder after dividing 4, 5 and 6 equals to 1. We will use Excel functions MOD and IF, see Tables 5 and 6. In Table 6 we will end as soon as YES appears in column E. Thus, the minimal number of dancers in the whole group is 61.

Pupils may notice, for example, that formula $\text{=IF}(B1*C1*D1=3; \text{"YES"}; \text{"NO"})$ in the column E cannot be replaced by the formula $\text{=IF}(B1+C1+D1=3; \text{"YES"}; \text{"NO"})$.

Table 5. Example 3, used functions in MS Excel.

	A	B	C	D	E
1	7	$\text{=MOD}(A1;4)$	$\text{=MOD}(A1;5)$	$\text{=MOD}(A1;6)$	$\text{IF}(B1*C1*D1=1; \text{"YES"}; \text{"NO"})$
2	8	$\text{=MOD}(A2;4)$	$\text{=MOD}(A2;5)$	$\text{=MOD}(A2;6)$	$\text{IF}(B2*C2*D2=1; \text{"YES"}; \text{"NO"})$
3	9	$\text{=MOD}(A3;4)$	$\text{=MOD}(A3;5)$	$\text{=MOD}(A3;6)$	$\text{IF}(B3*C3*D3=1; \text{"YES"}; \text{"NO"})$
4	10	$\text{=MOD}(A4;4)$	$\text{=MOD}(A4;5)$	$\text{=MOD}(A4;6)$	$\text{IF}(B4*C4*D4=1; \text{"YES"}; \text{"NO"})$
5	11	$\text{=MOD}(A5;4)$	$\text{=MOD}(A5;5)$	$\text{=MOD}(A5;6)$	$\text{IF}(B5*C5*D5=1; \text{"YES"}; \text{"NO"})$
6	12	$\text{=MOD}(A6;4)$	$\text{=MOD}(A6;5)$	$\text{=MOD}(A6;6)$	$\text{IF}(B6*C6*D6=1; \text{"YES"}; \text{"NO"})$
7	13	$\text{=MOD}(A7;4)$	$\text{=MOD}(A7;5)$	$\text{=MOD}(A7;6)$	$\text{IF}(B7*C7*D7=1; \text{"YES"}; \text{"NO"})$
8	14	$\text{=MOD}(A8;4)$	$\text{=MOD}(A8;5)$	$\text{=MOD}(A8;6)$	$\text{IF}(B8*C8*D8=1; \text{"YES"}; \text{"NO"})$
9	15	$\text{=MOD}(A9;4)$	$\text{=MOD}(A9;5)$	$\text{=MOD}(A9;6)$	$\text{IF}(B9*C9*D9=1; \text{"YES"}; \text{"NO"})$
.	.	.	.	.	.

Table 6. Example 3, results in MS Excel.

	A	B	C	D	E
1	7	3	2	1	NO
2	8	0	3	2	NO
3	9	1	4	3	NO
4	10	2	0	4	NO
5	11	3	1	5	NO
6	12	0	2	0	NO
7	13	1	3	1	NO
8	14	2	4	2	NO
9	15	3	0	3	NO
.	.	.	.	.	.
52	58	2	3	4	NO
53	59	3	4	5	NO
54	60	0	0	0	NO
55	61	1	1	1	YES

3. Conclusion

We were interested in some word problems concerning divisibility that can be solved by pupils aged 10 to 11 by means of MS Excel. This may prepare pupils well to study divisibility in the next years.

Divisibility plays a crucial role in modular arithmetic. Recall (“Modular arithmetic”, Wikipedia) that modular arithmetic is a system of arithmetic for integers, where numbers “wrap around” when reaching a certain value, called the modulus. In theoretical mathematics, modular arithmetic is extensively used in number theory, group theory, ring theory and abstract algebra. In applied mathematics, modular arithmetic is used, for example, in computer science and cryptography.

Modular arithmetic can be characterized by the following way (“The Irish Time”, 2017): you may not know it but you use it every day.

References

- (n.d.). Excel function guide. Retrieved 24-04-2020, Retrieved from URL
<https://exceljet.net/excel-functions>.
- (n.d.). Divisibility – math word problems. Retrieved 24-04-2020, Retrieved from URL
<https://www.hackmath.net/en/word-math-problems/divisibility>.
- (n.d.). The Irish Time (Nov 2, 2017), Modular arithmetic: you may not know it but you use it every day. Retrieved 24-04-2020, Retrieved from URL
<https://www.irishtimes.com/news/science/modular-arithmetic-you-may-not-know-it-but-you-use-it-every-day-1.3268649>.
- (n.d.). Modular arithmetic. (Wikipedia). Retrieved 24-04-2020, Retrieved from URL
https://en.wikipedia.org/wiki/Modular_arithmetic.
- (n.d.). Number theory. Retrieved 24-04-2020, Retrieved from URL
<https://www2.math.uconn.edu/~stein/math103/Slides/math103-08.pdf>.

CHESS PIECE TOUR PROBLEMS

Karel PASTOR

Palacký University Olomouc, Faculty of Education (Czech Republic)
karel.pastor@upol.cz

Abstract

Chess and other board games can significantly increase the level of mathematical literacy of pupils aged 6 to 11. Pupils can play chess, solve chess diagrams or deal with mathematical chess problems as for example independence problems or dominance problems. In our paper, we will focus on chess piece tour problems. We will reduce the classic chessboard 8×8 to a smaller 5×5 , 6×6 and 7×7 chessboard, respectively, to make chess piece tour problems more accessible to pupils aged 6 to 11.

Keywords: Mathematical chess problems, combinatorics, Mathematical Kangaroo.

1. Introduction

In our paper we will deal with mathematical chess problems, especially with chess piece tour problems. We recall (“Mathematical chess problems”, Wikipedia) which is formulated using a chessboard and chess pieces.

Chess piece tour problems ask to find a tour of certain chess piece, which visits all squares on a chess board (“Mathematical chess problems”, Wikipedia). It is very easy to find such tour for king, queen and rook. Since bishops are able to reach only squares of one color, the problem is formulated for one color. The most interesting is finding a tour for knight, i.e. Knight's_Tour.

The previous problems have been resolved generally for the chessboard $m \times n$, but we will focus on a smaller 5×5 , 6×6 and 7×7 chessboard, respectively, in order to make chess independence problems more accessible to pupils aged 6 to 11.

The reader can recall the movements of chess pieces (king, queen, rook, bishop and knight) using e.g. (“Rules of chess”, Wikipedia). We only show the movement of a special piece named kangaroo that was introduced in Mathematical Kangaroo (“Matematický klokan 2015”). A kangaroo moves three squares horizontally then one square vertically, or one square horizontally then three squares vertically, see Figure 1.

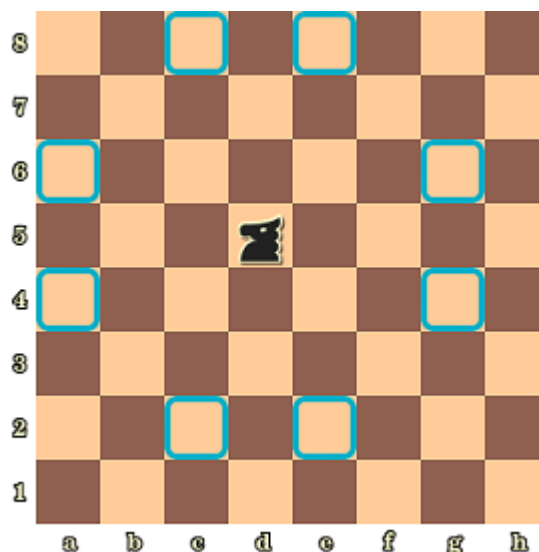


Figure 1. Moves of a kangaroo

2. Tour for queen, rook and king

Finding a tour for a queen is very easy as we can see on Figures 2-7. We can use different strategies in tours and we can also choose the different starting field (the starting field is highlighted by red colour and the ending field is highlighted by blue colour). We notice that the tours presented on Figures 2-4 can be used also for a rook or a king and the tours presented on Figures 5-7 can be used also for a king. In the given examples, the queen always moves by only one square. The queen could, of course, move more squares (such as the bishop in the next section).

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6
11	12	13	14	15
20	19	18	17	16
21	22	23	24	25

Figure 2. Tour for a queen (rook, king) on 5×5

36	35	34	33	32	31
9	10	11	28	29	30
8	7	12	27	26	25
5	6	13	22	23	24
4	3	14	21	20	19
1	2	15	16	17	18

Figure 3. Tour for a queen (rook, king) on 6×6

31	30	29	28	27	26	49
32	13	12	11	10	25	48
33	14	3	2	9	24	47
34	15	4	1	8	23	46
35	16	5	6	7	22	45
36	17	18	19	20	21	44
37	38	39	40	41	42	43

Figure 4. Tour for a queen (rook, king) on 7×7

1	23	3	25	5
22	2	24	4	6
21	20	12	13	7
19	17	14	11	8
18	15	16	10	9

Figure 5. Tour for a queen (king) on 5×5

21	22	30	31	35	36
11	20	23	29	32	34
10	12	19	24	28	33
4	9	13	18	25	27
3	5	8	14	17	26
1	2	6	7	15	16

Figure 6. Tour for a queen (king) on 6×6

7	8	9	10	11	12	13
34	6	24	23	17	16	14
35	33	5	25	22	18	15
36	46	32	4	26	21	19
37	47	45	31	3	27	20
38	48	49	44	30	2	28
39	40	41	42	43	29	1

Figure 7. Tour for a queen (king) on 7×7

3. Tour for bishop

We recall that the tour problem for a bishop is formulated for one color. Finding the tour is not very difficult, see Figures 8-10.

5		7		2
	6		8	
12		3		9
	13		10	
1		11		4

Figure 8. Tour for a bishop on 5×5

	6		11		2
17		7		12	
	18		8		10
14		3		9	
	13		16		5
1		15		4	

Figure 9. Tour for a bishop on 6×6

12		6		15		2
	10		17		24	
9		14		5		23
	18		1		20	
16		4		22		7
	25		19		13	
3		21		8		11

Figure 10. Tour for a bishop on 7×7

4. Tour for knight

Finding a tour for a knight is more complicated than the previously mentioned chess pieces. Figures 11-13 illustrate possible solutions for chessboards 5×5, 6×6 and 7×7, respectively.

5	16	21	10	3
22	11	4	15	20
17	6	23	2	9
12	25	8	19	14
7	18	13	24	1

Figure 11. Knight's Tour on 5×5

1	16	9	32	3	18
26	31	2	17	10	33
15	8	27	34	19	4
28	25	30	11	22	35
7	14	23	20	5	12
24	29	6	13	36	21

Figure 12. Knight's Tour on 6×6

1	12	23	46	3	14	25
22	49	2	13	24	35	4
11	28	45	40	47	26	15
42	21	48	27	34	5	36
29	10	41	44	39	16	33
20	43	8	31	18	37	6
9	30	19	38	7	32	17

Figure 13. Knight's Tour on 7×7

5. Tour for kangaroo

With respect to the movement of a kangaroo, the tour problem for this chess piece is formulated only for one color as in the case of bishop, see Figures 14-16.

	5		3	
8		10		12
	1		7	
6		4		2
	9		11	

Figure 14. Tour for a kangaroo on 5×5

	14		6		2
5		3		13	
	10		16		18
15		7		1	
	4		12		8
11		9		17	

Figure 15. Tour for a kangaroo on 6×6

	14		18		6	
19		7		15		17
	24		20		10	
13		11		5		21
	8		2		16	
1		23		9		3
	12		4		22	

Figure 16. Tour for a kangaroo on 7×7

6. Conclusion

We were interested in some chess piece tour problems that can be solved by pupils aged 6 to 11. A special attention was focused on a special piece named kangaroo.

To solve the previous problems pupils can use a squared paper or they can use some computer application, see e.g. ("Chess Diagram Setup").

Some of the previous problems are very simple (such as the problem with Figure 2) and pupils can solve them very quickly. Some problems may be more difficult to some pupils aged 6-11 (such as the problem associated with Figure 13). In this case, pupils can try to travel the figure as long as possible. Solving the previous problems may be preceded by solving some preparatory tasks, such as the task of getting a chess piece from one chessboard field to another.

References

- (n.d.). Mathematical chess problems. (Wikipedia). Retrieved 26-10-2020, from https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_chess_problem
- (n.d.). Rules of chess. (Wikipedia). Retrieved 26-10-2020, from https://en.wikipedia.org/wiki/Rules_of_chess
- (n.d.). Matematický klokan 2015 (in Czech). Retrieved 26-10-2020, from http://www.matematickyklokan.net/phocadownload/sborniky/sbornik_klokan_2015.pdf
- (n.d.). Chess Diagram Setup. Retrieved 26-10-2020, from <https://www.jinchess.com/chessboard/composer/>

INCENTIVY ZMĚN V PŘÍSTUPU ŽÁKŮ K MATEMATICE NA 1. STUPNI ZŠ

Renáta ZEMANOVÁ¹, Darina JIROTKOVÁ²

¹ Ostravská univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)

² Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta (Česká republika)

renata.zemanova@osu.cz, darina.jirotkova@pedf.cuni.cz

Abstrakt

Za důležitý identifikátor kvality výuky bývá často považován vztah žáků k danému předmětu. Vztahem žáků k matematice se zabývá mnoho výzkumů, cílem našeho bylo nalezení incentiv, tedy pohnutek, resp. podnětů, které vedou ke změnám postoje žáků 1. stupně ZŠ k matematice. Postupovali jsme metodou pozorování, a to jak strukturovaného, tak nestrukturovaného. Po dobu šesti měsíců jsme sledovali 22 žáků 1.–5. ročníku ZŠ, po 3–4 žácích z každé školy. Na základě získaných dat jsme identifikovali soubor osmnácti incentiv, kterými se budeme zabývat v pokračujícím výzkumu.

Klíčová slova: kvalita výuky, vztah žáků k matematice, strukturované pozorování, nestrukturované pozorování, incentivy změny vztahu žáků k matematice

INCENTIVES TO CHANGES OF PUPILS' ATTITUDE TOWARDS MATHEMATICS IN PRIMARY SCHOOL

Abstract

Pupils' attitude towards a particular subject is often considered as the important identifier of the quality of teaching. There are a number of researches that focus on pupils' attitude towards mathematics. The main goal of our research was to find the incentives, stimuli, that result in changes of primary pupils' attitudes to mathematics. As the research method, we used both structured and non-structured observation. For six months, we were observing 22 pupils from 1st–5th grades of primary school, 3–4 pupils from each school involved in the research. Based on the collected data we developed a set of 18 incentives. These incentives will be further considered in our following up research.

Keywords: quality of teaching, pupils' attitudes towards mathematics, structured observation, non-structured observation, incentives to changes of pupils' attitude towards mathematics

1. Úvod

Katedry matematiky a didaktiky matematiky pedagogických fakult Ostravské univerzity a Karlovy univerzity v oblasti pedagogického výzkumu v didaktice matematiky dlouhodobě spolupracují. Současný výzkum je pokračováním výzkumu (Zemanová, Jirotková 2017), jehož cílem bylo odhalit a popsat incentivy¹ posunů v pedagogickém přesvědčení studentů učitelství

¹ Pojem incentiva – incentiva posunů, změny, incentiva přispívající k posunům, incentiva u žáků apod. používáme ve smyslu podnětu, motivačního impulzu ke změně, k posunu, jevu z různých oblastí výuky, který přispívá zlomu ve vztahu k učení se matematice, k výuce v hodinách matematiky, k učiteli.

1. st. ZŠ. O výzkumu incentív u praktikujících učitelů 1. st. ZŠ referovali Hejný a Jirotková ve svém příspěvku Příčiny změn edukačního stylu učitele v matematice na konferenci ČAPV 2012 (nepublikováno). Pro identifikaci incentív přispívajících k posunům učitelova vyučování vycházeli z vytvořeného nástroje 20 parametrů charakterizujících edukační styl učitele (Hejný, 2012, Jirotková, 2012). Zkoumány byly zejména ty posuny ve vyučování a jejich příčiny, které vedou k vyšší intelektuální autonomii a tvořivosti žáků.

Edukační styl učitele a vztah žáka k matematice spolu úzce souvisí. I. Smetáčková v (Smetáčková, 2018) potvrzuje jak výsledky vlastních, tak i zahraničních výzkumů (Hoffman, 2010; Pajares, Graham, 1999), že čím je matematika oblíbenějším předmětem u žáků, tím lepší jsou jejich výsledky. Proto se nyní naše pozornost zaměřuje na žáka 1. st. ZŠ a zkoumání incentív jeho posunů ve vztahu k matematice. Ve zmíněných výzkumech se uvádí, že efektivitu přinášely změny, který se týkaly posunů vyučovací strategie učitele směrem ke konstruktivismu a rozvoje autonomie žáka a jeho intelektuálního sebevědomí (self-efficacy). Při tvorbě scénáře výzkumu jsme dále využili části výsledků výzkumu K. Bachratá, H. Bachratý (2018, nepublikováno), kteří po dobu několika let realizovali pozorování žáků ve výuce matematiky 1. stupně v jedné třídě ZŠ Kontešinec, Český Těšín, a na základě výsledků formulovali soustavu jevů ovlivňujících kvalitu výuky z pohledu žáka. V rámci našeho výzkumu jsme jimi navrhovanou soustavu modifikovali a výzkum provedli na větším vzorku žáků, ročníků, tříd a škol. Vzali jsme též v úvahu výsledky výzkumů v (Pavelková, Škaloudová, Hrabal 2010) a (Pavelková, Hrabal 2013), které dokládají korelaci mezi postojem žáka k předmětu a žákovou percepcí daného předmětu.

2. Cíl výzkumu

Jako důležitý indikátor kvality výuky bývá považován vztah žáků k vyučovanému předmětu (Stehlíková, 2007). Tuto skutečnost respektují i hodnotící nástroje používané v současné době Českou školní inspekcí. V poslední době proběhlo několik výzkumů, které se zabývají vztahem žáků k matematice. Hrabal a Pavelková (2010) porovnávají oblíbenost matematiky vzhledem k ostatním předmětům. Chvál (2013) porovnává vztah k matematice žáků od 4. ročníku ZŠ až do 4. ročníku SŠ a ukazuje na výrazně klesající oblibu matematiky s přibývajícími lety žáka. Smetáčková (2018) se zabývá dvěma faktory, které ovlivňují vztah žáka k matematice, a sice externí hodnocení (známka na vysvědčení) a sebehodnocení (self-efficacy). Kritickým věkem, kdy se mění vztah žáků k matematice, je přechod z 5. do 6. ročníku ZŠ. Příčinami silného propadu oblíbenosti matematiky se zabývá ve svém výzkumu Vernerová (2019). O výrazně špatném vztahu našich žáků k matematice také hovoří výzkumy PISA (Tomášek, Frýzek, 2013). Tato alarmující zjištění jsou důvodem, proč se vztahem žáků k matematice zabýváme. Cílem našeho výzkumu je identifikace incentív, které vedou ke změnám postoje žáků 1. stupně ZŠ k matematice a tím pak také k efektivnějšímu učení.

3. Metodologie

Pro identifikaci incentív jsme využili systematické pozorování 22 vybraných žáků ve standardních vyučovacích hodinách matematiky na 1. stupni ZŠ, a to jak nestrukturované, tak strukturované. Pozorování proběhlo v šesti základních školách, v každé škole v jedné třídě 1. stupně, tří žáků. Kritériem volby školy byla dojezdová vzdálenost, kritériem volby třídy byl důsledný konstruktivistický přístup učitele k výuce matematiky. Přístup k výuce posuzujeme dlouhodobě sledováním práce učitele v jeho hodinách matematiky. Žáky vybral třídní učitel tak, aby reprezentovali skupinu žáků v matematice hodnocených nadprůměrně, průměrně a podprůměrně. Data podle našich pokynů shromažďovalo 42 proškolených studentů 3. ročníku oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ s frekvencí jednou týdně po dobu šesti měsíců (září 2018–únor 2019), přičemž stejného žáka vždy střídavě pozorovali nezávisle na sobě dva různí

studenti, s výjimkou dvou žáků, kteří byli pozorováni každý jen jedním studentem. Větší počet pozorovatelů vnáší do záznamů pozorování subjektivní faktor. Částečně jsme ho eliminovali dvěma nezávislými pozorovateli jednoho žáka, avšak je stále potřeba s tímto faktorem počítat.

Nestrukturované pozorování jsme realizovali jednou na začátku a jednou na konci výzkumu a dále jako doplnění každého strukturovaného pozorování v průběhu výzkumu. Vytvořili jsme volný popis jednání žáka v hodině matematiky. Fakta v něm uvedená jsme porovnávali 1) mezi dvěma hodnotiteli stejného žáka, 2) na počátku a konci pozorovaného období u jednoho hodnotitele, 3) na počátku a konci pozorovaného období u jednoho žáka. Identifikovali jsme vazby mezi jevy a chováním žáka. Záznamy daly také mnoho informací o osobnosti studenta, který záznam pořídil. Tyto jsme porovnali s výsledky našeho dřívějšího výzkumu (Studentský pohled na praktickou složku učitelské přípravy v matematice 1. stupně). O nich se však v tomto článku zmiňovat nebudeme.

Pro strukturované pozorování jsme formulovali jevy, které se týkají jednak řešitelského procesu žáka a jednak jeho momentálního nastavení mysli (ve smyslu Dweck, 2017). Vybrali jsme takové jevy, které jsou snadněji pozorovatelné, a tedy lze také evidovat změnu v jednotlivých položkách. Snažíme se pracovat s jevy, které nevyžadují zdůvodňování záměrů a postojů (Baird, 2001). Nicméně musíme připustit, že i když jsme se snažili jednotlivé jevy vymezit a vyhnout se tak subjektivnímu pohledu pozorovatele, jistě dochází k vlastní interpretaci pozorovatele, který lépe vidí to, čemu dobře rozumí (Tower, Davis, 2002). Vybrané jevy jsou: Uchopení zadání, Nabízená pomoc, Vyhledávaná pomoc, Potřeba potvrzení autoritou, Rozpor mezi skutečností a interpretací, Správnost řešení, Hledání dalšího řešení, Otevřenost při neúspěchu, Práce s vlastní chybou, Pracovní úsilí, Pracovní nasazení, Komunikace, Jiná činnost. S těmito jevy již pracovali ve svém výzkumu K. Bachratá a H. Bachratý (2018, nepublikováno). Jejich výzkum pilotně ověřil funkčnost vybraných jevů pro identifikaci incentív změny.

Pro každý jev jsme detailně vymezili kritéria a způsob jejich hodnocení, část záznamového archu uvádíme v tabulce 1. Jevy 1–10 budou hodnoceny ano/ne, jevy 11–13 škálou s pěti stupni od 1 (velmi) po 5 (vůbec). Pozorovací nástroje umožnily záznam a vyhodnocení aktuálních stavů a vývoje v rámci jednotlivých jevů. Nástroje a jejich implementaci jsme připravili tak, aby bylo možné stejné pozorování na jiné skupině žáků kdykoli opakovat a dosažené výsledky porovnávat.

Tabulka 1. Strukturované pozorování, hodnocení jevů

2	Řešení úloh – úloha 1 (doložte text 1)	ano	ne
1.	Uchopení zadání: Zadání úlohy uchopí		
2.	Nabízená pomoc: Aktivně nabízí pomoc		
a)	transmisivní: Vysvětluje spolužákovi/spolužákům		
b)	konstruktivistická: Vede spolužáka/spolužáky k pochopení		
3.	Vyhledávaná pomoc: Aktivně vyhledává pomoc		
a)	u učitele		
b)	u spolužáka/spolužáků		
4.	Potřeba potvrzení autoritou		
5.	Rozpor mezi skutečností a interpretací		
6.	Správné řešení: Úlohu vyřeší správně		
7.	Další řešení: Aktivně hledá více řešení		
8.	Otevřenost při neúspěchu: Přiznává, že nerozumí		
9.	Práce s vlastní chybou: Chybu uzná, opraví		
10.	Úsilí: Nepřestává řešit, ačkoli mu to nejde		

		1	2	3	4	5	
11. Pracovní nasazení: Má podíl na vyřešení úlohy	ano						ne
12. Komunikace: Zapojuje se do diskuze							
a) se spolužákem	ano						ne
b) se skupinou spolužáků/třídou	ano						ne
c) s učitelem	ano						ne
13. Jiná činnost: Dělá něco jiného, než matematiku	ano						ne

4. Výsledky

V tabulce 2 uvádíme přehled pozorovaných žáků a jejich pozorovatelů na jedné škole. Pozorovaní žáci jsou označeni Z-01 (silný), Z-02 (průměrný), Z-03 (slabý), pozorovatelé silného žáka P-01-1, P-01-2, průměrného P-02-1, P-02-2 a slabého P-03-1, P-03-2. Obdobný záznam používáme pro další školy.

Tabulka 2. Identifikace žáků a pozorovatelů na jedné škole

ZŠ A			
úroveň žáka	pozorovaní žáci	pozorovatel 1	pozorovatel 2
silný	Z-01	P-01-1	P-01-2
průměrný	Z-02	P-02-1	P-02-2
slabý	Z-03	P-03-1	P-03-2

V tabulce 3 uvádíme pro ilustraci hodnocení pozorovaného žáka Z-03 pozorovateli P-03-1 (sloupce vyšedivěny) a P-03-2 v týdenních intervalech. Vodorovné záhlaví udává identifikátor pozorovatele a datum pozorování, svislé záhlaví identifikátor pozorovaného jevu. Jevy 1–13 hodnoceny ano/ne značíme 1/0 (1 – ano, 0 – ne), jevy 11–13 hodnoceny škálou 1–5 značíme umístěním na škále 1 (velmi) – 5 (vůbec). Obdobný záznam používáme pro další žáky.

Tabulka 3. Strukturované pozorování žáka Z-03, hodnocení jevů 1–13

jev	P-03-1-18.10.	P-03-2-25.10.	P-03-1-01.11.	P-03-2-08.11.	P-03-1-15.11.	P-03-2-22.11.	P-03-1-29.11.	P-03-2-06.12.	P-03-1-13.12.	P-03-2-20.12.	P-03-1-17.01.	P-03-2-24.01.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2a	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
2b	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
3a	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0
3b	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0
4	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0
5	1	0	x	0	x	0	1	0	1	0	0	0
6	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
7	0	1	x	0	x	1	0	0	0	1	1	0
8	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
9	0	0	x	0	x	1	1	1	1	1	1	1
10	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	3	2	2	2	2	1	1	2	1	1	2	2
12a	1	2	1	2	1	1	1	2	3	2	4	3
12b	1	2	1	5	1	1	2	3	5	4	3	5
12c	1	2	1	4	1	1	3	3	1	3	2	5
13	3	5	3	5	3	3	2	3	5	3	4	5

Pozorování 1: Nestrukturované pozorování téhož žáka na začátku období popsal pozorovatel P-03-1 takto: „Josef měl příklad vypočítaný rychle a správně, proto šel k dvojici spolužaček, které v tom měly problém, a sám jim vysvětloval, jak na výsledek přišel. Tato situace je důkazem toho, že Josef se snaží využívat své znalosti z matematiky. Žák (podle učitelky) má občas problém s poznáváním čísl, proto jsem na něj byla zvědavá, ale po těchto dvou hodinách se mi nezdálo, že by měl nějaký výraznější problém. Ba naopak, v hodině druhé, která byla orientována na geometrii, měly děti za úkol nakreslit na papír, jakými parketami by daný rozměr (4x3) vyplnily. Měly za úkol použít pouze 3 ks parket s libovolnou velikostí, ale musely být 3. Tento úkol měl první správně právě pozorovaný Josef. Zřejmě nemá problém s prostorovou orientací. Podle IVP je pro žáka důležitá motivace a podpora, kterou paní učitelka vyřešila v rámci nálepek. Josef těchto nálepek má v sešitě více, proto je vidět, že se opravdu snaží. Paní učitelka mi sama potvrdila, že sledovaný žák je přirozeně inteligentní, má velký rozhled v jiných oblastech. Je velmi aktivní, snaží se zapojovat do chodu třídy. Žák v hodinách nevyrušuje, když něco chce, vždy se přihlásí a čeká na vyvolání. Všimla jsem si však jedné věci a to té, že si potřebuje po zadaném zadání sám ověřit, zdali úkol pochopil dobře a zdali to má dělat takto. Mnohdy se jedná jen o přikývnutí od paní učitelky, ale i toto přikývnutí je pro Josefa důležité.“

Pozorování 2: Nestrukturované pozorování téhož žáka na začátku období popsal pozorovatel P-03-2 takto: „Na žákovi mne zaujal jeho netypický vzhled (dlouhé vlasy) a opravdu velká chuť do práce. Josef bez problémů zapadl do kolektivu třídy. Je usměvavý, pouští se do her spolužáků o přestávkách. V přítomnosti praktikantek se choval naprosto přirozeně. Jako každé zvědavé dítě se na nás občas podíval, ale nijak jsme neovlivňovaly jeho výkon. V hodinách se snaží radit spolužákovi, avšak nevyrušuje. Josef patří mezi velmi aktivní žáky. Jde vidět, že je velmi zapálený pro výuku (neustále se hlásí). Do všech aktivit se Josef vrhá po hlavě. Obvykle má problémy s vysvětlením pojmu, kdy zná správné řešení, ale nedokáže jej správně formulovat, utřídit myšlenky. Např. nedokázal správně vysvětlit řešení úlohy v prostředí Výstaviště, ale správně ji vyřešil. Jeho spolužačka Lea se toho ujala a zkonštatovala to s ním. Josef se v některých činnostech ukázal i jako vůdčí typ, kdy organizoval průběh řešení úlohy (žáci seděli v kroužku a pokládali papírky s čísly do prostředí Výstaviště). Pokud si Josef neví rady (např. při samostatné práci), žádá o pomoc paní učitelku. Všimla jsem si, že je Josef často vyvoláván paní učitelkou, která se snaží o jeho posun. Pro tohoto žáka je slovní pochvala velkou motivací. Vidí v učiteli oporu, protože se na něj obrací velmi často a ujišťuje se, zda vyřešil příklad správně atd.“

Pozorování 3: Nestrukturované pozorování téhož žáka na konci období popsal pozorovatel P-03-2 takto: „Josef je stále aktivní, přemýšlí nad problematikou a zapojuje se do diskuse. Jeho zápal v hodinách se nemění, stále je aktivní a s chutí se pouští do všech aktivit. Těší ho, když je vyvolán k tabuli. Pozorovaný žák se neustále zapojuje do aktivit, hlásí se a chce se podělit o postup řešení problému. Vysvětlí, proč se v úloze napíše věk, od kterého se odvíjí řešení dalších příkladů, ale v sešitě si pak sám neví rady. Pokračuje v rozdílu čísel v řadě, avšak nerozumí principu (rozdíl 6 let) pokud se vrací ze základního věku zpět k narození. Jeho spolužačka Lea mu pomáhá s řešením. Myslím si, že mu „doučování“ od Lei pomohlo, protože po chvíli rozuměl principu i v případě, kdy se zadání změnilo. Sám přišel na to, jak se počítá obvod. Jožku násobilka nezajímá, baví ho spíše logické příklady než mechanické učení. Násobilku počítá pomocí n-tabulky.“

V porovnávání textu nestrukturovaných pozorování stejného žáka různými pozorovateli jsme se zaměřili na 1) shody, 2) rozpory a 3) údaje, které se objevují jen u jednoho z obou pozorovatelů. Zajímají nás jevy vymezeny v tabulce 1, porovnáváme pozorování v přibližně stejném časovém období (rozdíl 1 týden). Pokud jev uvedou oba pozorovatelé, má pro nás větší váhu. Pokud je jev ve výpovědích pozorovatelů v rozporu, nemá žádnou váhu, ale budeme ho

u pozorovaného žáka detailněji sledovat. Jako příklad uvádíme porovnání nestrukturovaných pozorování pozorovatelů P-03-1 a P-03-2 na začátku období, viz Pozorování 1, Pozorování 2. Nacházíme shody: snaha žáka nabízet pomoc ostatním spolužákům, snaha vyhledávat pomoc u učitele, potřeba potvrzení autoritou, potřeba motivace ze strany učitele, vysoké pracovní nasazení. Nenacházíme žádné rozpory. Jen jeden z pozorovatelů uvedl vedení kolektivu (organizace činnosti ve skupině žáků).

V porovnávání textu nestrukturovaných pozorování stejného žáka stejným pozorovatelem na začátku a konci období jsme se zaměřili na vývoj jevů v některém z obou pozorování uvedených. Zajímají nás jevy vymezeny v tabulce 1. Jako příklad uvádíme porovnání nestrukturovaných pozorování pozorovatele P-03-2 na začátku a konci období, viz Pozorování 2, Pozorování 3. Sledujeme pracovní nasazení (zůstává vysoké, nemění se) a motivaci (stále potřebná, navíc se objevuje snaha o zviditelnění).

K příčinám posunu vztahu žáka Z-03 k předmětu zjištěnému porovnáním výpovědí Pozorování 2 a Pozorování 3 (Pozorování 2 – žák nesdílí řešení se třídou, nesnaží se vysvětlit ostatním podstatu problému a strategie řešení, při potížích o pomoc žádá učitele, Pozorování 3 – žák se pokouší o sdílení řešení se třídou, snaží se vysvětlovat podstatu problémů a strategie řešení, při potížích přijímá pomoc od spolužáků) řadíme: pochvala učitele, ujištění autoritou (učitelem), kontrola správnosti (pochopení, postupu, výsledku), možnost uplatnění (prezentace před učitelem/třídou), preference logických úloh, vedení kolektivu.

V databázi strukturovaného pozorování, kterou jsme zatím sestavili pouze v kvantitativních datech (tabulka 3), jsou zajímavé změny chování žáka. Například v tabulce 3 uvedené změny na řádcích 2a (aktivně nabízená transmisivní pomoc – vysvětluje spolužákům) a 2b (aktivně nabízená konstruktivistická pomoc – vede spolužáky k pochopení). Žák do 22. 11. v téměř každém pozorování obě formy pomoci nabízel (což koresponduje s nestrukturovaným pozorováním), od 29. 11. už nikdy. Zajímá nás, co bylo důvodem této změny. Co by mohlo pomoci žákovi tlumit transmisivní přístup a posilovat konstruktivistický, když je schopen obou? Ve stejné hodině bylo jeho pracovní úsilí velmi vysoké a do diskuze se zapojoval maximálně (tabulka 3, řádky 11, 12a–c). Jednou z možností je, že u žáka došlo k menší ztrátě motivace, neboť pro něj úlohy už nebyly výzvou. Nebyly přiměřené jeho kognitivní úrovni. Nejdříve se orientoval na pomoc ostatním žákům, ale ochabnutí motivace oslabilo i tuto jeho aktivitu.

Dalším zdrojem jsou nestrukturovaná pozorování z tohoto období. Pozorovatel P-03-1 dne 29. 11. zaznamenává: „Josef si na tabulku nakreslil přímo schody, na kterých se pohyboval fixem dopředu a dozadu a reálně si to představil. Výsledek měl správně, podobně jako celá třída. Po uchopení tohoto cvičení paní učitelka vzala děti na reálné schodiště, kde jsme s dětmi pracovali ve skupinách. Paní učitelka děti rozdělila do skupinek po 4 a každá skupinka měla nás praktikanty jako své dospělé dohlížející. Na schody jsme si se žáky vyskládali čísla od 0 až 9. Každý praktikant měl u sebe lístečky s danými příklady například $5 \rightarrow \rightarrow \rightarrow ? \leftarrow \leftarrow 6 \rightarrow ?$. Nejprve jsem žákům příklady diktovala, ale potom pro zaktivizování žáků jsem každému ve skupinky dala lísteček s podobným příkladem a žáci si navzájem říkali příklady a kontrolovali se... Měla jsem ve skupině zrovna všechny kluky, takže jsem mohla pozorovat jak Josefa, tak Vojtu, Matěje a Šimona. Všichni dané zadání zvládli s přehledem, neobjevil se žádný problém.“ Zdá se, jako by žák přebíral roli učitele, který v konstruktivistické výuce všechnu intelektuální činnost ponechává na žácích. Josef úlohu rychle a správně vyřeší, ujistí se o správnosti řešení, nepotřebuje pomoc a dále organizuje činnost ostatních.

5. Diskuze

Na základě analýz záznamů nestrukturovaného pozorování všech 22 žáků jsme zformulovali jevy, o kterých spekulujeme, že u žáků vedly ke změně jednání a můžeme tak o nich v delším horizontu uvažovat jako o činitelích ovlivňujících vztah žáků k matematice.

Tedy je můžeme považovat za incentive posunu žákova vztahu k předmětu. Zapisujeme jev, pokud se v záznamovém archu alespoň jednou vyskytl. 18 identifikovaných jevů jsme roztřídili do šesti skupin:

KOGNITIVNÍ

- preference typu úloh (algoritmické, logické),

METAKOGNITIVNÍ

- potřeba kontroly (zadání, postup, výsledek),
- používání pomůcek,
- preferovaná forma práce (individuálně, ve skupině),

OSOBNOSTNÍ

- potřeba pomáhat,
- potřeba autority (učitel),
- potřeba vedení kolektivu,
- možnost uplatnění (sdělení řešení, zviditelnění před učitelem/třídou, přijetí pomoci),
- stydlivost,

SOCIÁLNÍ

- vztahy v kolektivu (kamarádi, vazby se spolužáky, posměch, obdiv, uznání, respekt...),
- respekt učitele,

INTERAKTIVNÍ

- pochvala učitele,
- podpora rodiny,

TÝKAJÍCÍ SE KLIMATU TŘÍDY

- strach a radost,
- nuda,
- bezpečí,
- atmosféra ve třídě (volný pohyb).

Většina uvedených jevů a jejich vliv na efektivitu výuky je diskutována v mnoha studiích v oblasti jak psychologie, tak didaktiky matematiky. Například J. Boaler uvádí v (Boaler, 2016) vysoce pozitivní vliv na výkon žáka respekt, uznání a pochvala učitele, Smetáčková v (Smetáčková, 2016) zmiňuje výzkumy prokazující souvislost metakognice se školními výkony a učením se. Ve svých výzkumech se zabývá mimo jiné vlivem osobnostních jevů a jevů, týkajících se klimatu třídy na výkon žáků.

Uvádíme několik vybraných zkrácených zápisů nestrukturovaného pozorování, kde jsou incentive dobře identifikovatelné:

Pozorování 1: „Vendulka není pasivním žákem do té doby, dokud nemusí něco říkat nahlas před spolužáky – do diskuzí se nezapojuje, hlásí se občas, paní ředitelku poprosí o pomoc jen ojedinele – raději se zeptá kamaráda v lavici, se kterým si vzájemně pomáhají. V případě, že si neví rady, přizná si to a nejprve se snaží najít řešení sama a až poté hledá pomoc.“ Incentivou posunu postoje k matematice žákyně, která se jeví jako introvertní, by mohlo být ponechání prostoru pro autonomii (preferovaná forma práce).

Pozorování 2: Očividně tato úloha Matěje velmi bavila, protože se horlivě zapojoval do činnosti. Dobrovolně se hlásil o slovo, aby mohl vyslovit své otázky, které ho vedly ke správnému výsledku. Při pozorování jsem zaznamenala, že se Matěj plně soustředí na úlohu, nejspíše protože ho zajímá. Dokonce se ani nekouká ke spolužačce, se kterou sedí, což je pro něj nezvyklé. Často si nevěří a raději se ujistí tím, že si svůj výsledek zkontroluje se spolužačkou.

Ale tentokrát tomu tak nebylo, zdá se, že je, více sebejistější.“ Incentivou pro vzbuzení zájmu o matematiku, pro růst autonomie a intelektuálního sebevědomí by mohla být nabídka zajímavých a přiměřeně obtížných úloh.

Pozorování 2: „*Když nakouknu, všimnu si, že Jasmínka neví, co má dělat, pouze píše to, co jí řekne David. Snažila jsem se Jasmínku navádět tak, aby na to přišla sama. Myslím, že se nám to povedlo.*“ Incentivou změny vztahu žákyně k předmětu by mohl být růst jejího sebevědomí způsobený radostí ze samostatně vyřešené úlohy.

Výsledky jsme následně interpretovali zejména pro využití v přípravě budoucích učitelů i systému dalšího vzdělávání pedagogických pracovníků, včetně formulace scénáře pro metodu kombinovaného dialogu. Některé incentive zjištěné u žáků a budoucích učitelů jsou shodné, některé se sebou souvisejí a některé se vylučují. Např. učitelé: „Neumíme rychle reagovat na neobvyklá řešení“, žáci: „Baví nás hledat neobvyklá řešení“, učitelé: „Nepodporujeme soutěživost žáků, ale spolupráci“, žáci: „Chceme více soutěží, být první“.

6. Závěr

I když pro relativně malý vzorek respondentů není možné činit zobecňující závěry, přináší náš výzkum z hlediska didaktiky matematiky a přípravy učitelů zajímavé výsledky a jsme přesvědčeni, že stojí za to v něm pokračovat v následujících letech. Zaměříme se na strukturované pozorování vybraných jevů tak, že po celou vyučovací hodinu bude pozorován pouze jeden z nich. Očekáváme, že pozorující studenti – budoucí učitelé v dalším nestrukturovaném pozorování už budou velmi dobře schopni zachytit relevantní jevy v jejich vývoji, čehož v počátcích pozorování schopni nebyli. Výzkum tak průběžně přináší rovněž zlepšení kvality pozorovacích schopností budoucích učitelů. Dále budeme pozorovat, jak budoucí učitelé, kteří z předchozího pozorování žáků vědí o incentivech posunu vztahu žáků k matematice, dokáží tyto znalosti aplikovat ve své vlastní výuce ve prospěch nárůstu kvality vyučování.

Acknowledgements

Výzkum byl podpořen výzkumným projektem Univerzity Karlovy v Praze PROGRES Q17 Profesní rozvoj budoucích učitelů a výzkumným projektem Ostravské univerzity Pregraduální vzdělávání v učitelských oborech na Pedagogické fakultě Ostravské univerzity.

Literatura

- Bachratý, H., Bachratá, K. (2018), nepublikované texty.
- Baird, J., R. (2001) Learning and Teaching: From ignorance to understanding. In D. Clarc (Ed.). *Perspectives on practice and meaning in mathematics and science classroom*, 255-289. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Boaler, J. (2016) *Mathematical mindsets: Unleashing student's potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. Kindle edition, San Francisco, CA: Wiley.
- Dweck, C. (2017) *Nastavení mysli: Nová psychologie úspěchu aneb naučte se využít svůj potenciál*. Brno: Jan Melvil publishing.
- Hrabal, V., Pavelková, I. (2010) *Jaký jsem učitel*. Praha: Portál.
- Hoffman, B. (2010). “I think I can, but I’m afraid to try”: The role of self-efficacy beliefs and mathematics anxiety in mathematics problem-solving efficiency. *Learning and Individual Differences*, 20(3), 276-283.

- Chvál, M. (2013) Změna postojů českých žáků k matematice během školní docházky. *Orbis scholae*, 7(3), 49-71.
- Jirotková, D. (2012) Tool for diagnosing the teacher's educational style in mathematics: development, description and illustration. *Orbis Scholae*, 6(2), 69-83.
- Hejný, M. (2012) Exploring the cognitive dimension of teaching mathematics through scheme-oriented approach to education. *Orbis Scholae*, 6(2), 41-55.
- Pajares, F., Graham, L. (1999). Self-efficacy, motivation constructs, and mathematics performance of entering middle school students. *Contemporary Educational Psychology*, 24(2), 124-139.
- Pavelková, I., Hrabal, V. (2013) Mathematics in perception of pupils and teachers. *Orbis Scholae*, 6(2), 119-132.
- Pavelková, I., Škaloudová, A., Hrabal, V. (2010) Analýza vyučovacích předmětů na základě výpovědi žáka. *Pedagogika*. 60(1), 38-61.
- Smetáčková, I. (2018) Obliba školní matematiky a její souvislost s externím hodnocením a sebehodnocením. *Scientia in Educatione*, 9(2), 44-56.
- Smetáčková, I. (2016) Matematické sebehodnocení žáků a žáků 4. a 8. ročníku ZŠ. *Scientia in educatione*, 7(1), 16-28.
- Stehlíková, N. (2007) Charakteristika kultury vyučování matematice. In A. Hošpesová, N. Stehlíková & M. Tichá (Eds.) *Cesty zdokonalování kultury ve vyučování matematice*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 13-47.
- Tomášek, V., Frýzek, M. (2013) *Matematická gramotnost. Úlohy z šetření PISA 2012*. ČŠI, Praha.
- Towers, J., Davis, B. (2002) *Structuring occasions*. Educational studies in Mathematics, 49, 313-340.
- Vernerová, K. (2019) *Změny postojů žáků k matematice při přechodu z 1. na 2. stupeň základní školy*. Diplomová práce, vedoucí M. Chvál, PedF UK, Praha.
- Zemanová, R., Jirotková, D. (2017) Studentský pohled na praktickou složku učitelské přípravy v matematice 1. stupně. In K. Sebíňová, L'. Gerová, P. Voštinár (eds) *Elementary Mathematics Education 2017: Primárne matematické vzdelávanie teória, výskum a prax*. Banská Bystrica: Univerzita Mateja Bela. 159-162.

ELEMENTARY MATHEMATICS EDUCATION JOURNAL

Editorial Office: Palacký University Olomouc

Faculty of Education

Department of Mathematics

Address: Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic

Phone: +420 58 563 5709

E-mail: emej@upol.cz

Electronic edition: <http://emejournal.upol.cz/issues>

2020

Vol. 2, No. 2

ISSN 2694-8133