ISSN 2694-8133

TYPICKÉ PŘÍSTUPY A CHYBY NADANÝCH ŽÁKŮ 1. STUPNĚ PŘI ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ÚLOH

Irena BUDÍNOVÁ
Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)
irena.budinova@seznam.cz

Abstrakt

Článek se zabývá řešitelskými strategiemi žáků 4. a 5. ročníku základní školy u úloh, které jsou řešitelné rovnicemi. Tyto úlohy mohou být řešeny aritmeticky i algebraicky. V příspěvku jsou uvedeny způsoby řešení těchto úloh nadanými žáky a některé frekventované chyby.

Klíčová slova: slovní úlohy, nadaní žáci, strategie řešení

TYPICAL APPROACHES AND ERRORS OF GIFTED ELEMENTARY SCHOOL PUPILS WHEN SOLVING ALGEBRAIC TASKS

Abstract

The paper deals with the solving strategies of gifted fourth and fifth graders at primary schools while solving word problems that can be solved by equations. These word problems can be solved in both arithmetic and algebraic way. The ways of solving tasks by gifted pupils and some of the frequent mistakes are the focus of this paper.

Keywords: word problem, gifted pupils, solving strategies

1. Úvod

V roce 2013 byl ve spolupráci s Pedagogickou fakultou MU veden na základních školách matematický kroužek, který byl primárně určen pro nadané žáky 4. a 5. ročníku. Byly osloveny vybrané školy Jihomoravského kraje. Podmínkou toho, aby se škola mohla do projektu zapojit, bylo, že na 1. stupni je alespoň jeden nadaný žák, diagnostikovaný odborným pracovištěm. Všichni odborně identifikovaní žáci[1] daných ročníků navštěvovali kroužek, možnost zapojit se do kroužku byla rovněž dána dalším žákům. Celkem se do matematického kroužku zapojilo 14 škol a 135 žáků.

Žáci navštěvovali kroužek ve své škole jedenkrát týdně po dobu osmi týdnů. Celkově bylo zadáno 63 úloh, které se týkaly všech témat školské matematiky a dále kombinatoriky a teorie grafů. Některé z úloh byly motivační, vycházely ze základního učiva (pro nenadané žáky, kteří neměli rozvinuté matematické myšlení), jiné úlohy byly školsky netypické.

[1] Identifikace nadaných žáků je komplexní a dlouhodobá záležitost, na které se podílejí rodiče, učitel, pedagogicko-psychologická poradna a dítě. Více informací na http://www.nuv.cz/uploads/rovne_prilezitosti_ve_vzdelavani/nadani/diagnostika/standard_diagnostiky_mn_2016_12_09.pdf

Školy dostávaly každý týden jeden pracovní list s osmi (jednou se sedmi) úlohami (Blažková & Budínová, 2014). Na vypracování jednoho pracovního listu měli žáci dostat 45 minut, po skončení měla proběhnout diskuze s učitelem.

Mezi úlohami se pravidelně objevovaly také úlohy rovnicového charakteru různé náročnosti. Ve výzkumném šetření jsem se zaměřila právě na tyto úlohy.

Článek stručně pojednává o řešení úloh rovnicového charakteru a uvádí některé výsledky výzkumu.

2. Úlohy rovnicového charakteru a způsoby jejich řešení

Pojem **úloha rovnicového charakteru** použil již Hejný (1990) pro úlohy, které je možné úplně vyřešit tak, že se vymodelují rovnicí, nebo úlohy, ve kterých je řešení rovnice pouze součástí širšího myšlenkového procesu řešení úlohy. Úlohu rovnicového charakteru (tj. úlohu, která je řešitelná algebraicky) je obvykle možné řešit různými strategiemi. Ty můžeme rozdělit na **aritmetické** a **algebraické**. Aritmetické strategie dělíme dále dle míry sofistikovanosti na **experimentální** a **neexperimentální**. Experimentování má mnoho různých podob, v základním dělení rozlišujeme **neřízený** a **řízený experiment**. Aritmetické strategie mohou mít řadu různých forem, v závislosti na typu úlohy a rovněž na způsobu vizualizace vztahů.

Nejjednodušší, nejméně sofistikovanou a na matematický aparát nejméně náročnou je strategie **neřízeného experimentu**, která bývá také označována jako **metoda pokusu a omylu**. Žáci se snaží najít řešení slovní úlohy tak, že odhadnou výsledek. Podle Novotné (2000) může mít tento postup tři různé průběhy: 1) řešitel uvede odhadnutý výsledek za řešení slovní úlohy, neprovádí zkoušku správnosti; 2) řešitel provede zkoušku správnosti, která mu potvrdí správnost výsledku – buď hledá další řešení, obvykle jinou strategií, nebo další řešení nehledá; 3) řešitel provede zkoušku správnosti a odhalí, že jeho řešení nevyhovuje zadání úlohy – dále buď řešení vzdá, nebo se ho snaží hledat jinou strategií.

Jiný pohled na strategii pokusu a omylu má Hejný (2014). Dělí ji na náhodnou, částečně organizovanou, organizovanou. Při volbě této strategie žákovi dle něj ulehčí počítání, když si sestaví tabulku, ve které může sledovat vztahy mezi veličinami. Tím se z pokusu a omylu může stát řízené (systematické) experimentování.

Řízený experiment je strategie, která po řešiteli vyžaduje větší zkušenost a cílevědomější vyhodnocování získaných výsledků. Žák vyhodnocuje přesnost svého odhadu a postupně se přibližuje ke správnému výsledku.

Aritmetické strategie jsou takové, kdy není pro řešení použita rovnice. Žák hledá vztahy mezi zadanými údaji a volí vhodné operace k výpočtu neznámých hodnot. Vztahy mezi veličinami je také možné znázornit graficky, pak se strategie nazývá **grafická**, případně aritmetická s grafickým znázorněním. Při **algebraické strategii** řešitel při řešení úlohy používá jednu nebo více rovnic.

3. Cíl a výzkumné otázky

Cílem výzkumného šetření bylo zjistit, v jakých úlohách rovnicového charakteru budou žáci nadaní[2] úspěšnější než žáci, kteří jako nadaní nebyli identifikováni, ale účastnili se výše zmíněného kroužku. Dalším cílem bylo zjistit, zda nadaní žáci preferují určitý přístup k řešení těchto úloh, zda se u nich projeví nějaké opakující se fenomény a zda lze nalézt souvislost mezi typem nadání žáka a strategiemi, které preferuje.

[2] Nadanými žáky budu označovat ty, kteří byli odborně identifikováni v PPP.

ISSN 2694-8133

Položila jsem si následující výzkumné otázky:

- Budou v řešení vybraných úloh nadaní žáci úspěšnější než ostatní?
- Bude mezi úlohami taková, v níž budou nadaní žáci výrazně úspěšnější než nenadaní žáci?
- Které řešitelské strategie budou nadaní žáci preferovat?

Dále jsem zpracovala výsledky statisticky a vyslovila jsem následující hypotézu, vztahující se ke každé úloze zvlášť:

Nadaní žáci budou v řešení dané úlohy statisticky významně úspěšnější než nenadaní žáci.

4. Výzkumný vzorek

Kroužek zmíněný v úvodu kapitoly probíhal ve dvou bězích, v každém běhu se účastnily jiné školy a jiní žáci. Celkem se kurzů účastnilo 14 škol, dvě v obou bězích. Prvního běhu se účastnilo celkem 55 žáků a druhého 80 žáků. Jako nadaní byli označeni ti žáci, kteří byli pedagogicko-psychologickou poradnou diagnostikováni jako nadaní – všeobecně, matematicky, nebo i jinak. V prvním běhu se účastnilo 17 nadaných žáků 4. ročníku a 15 nadaných žáků 5. ročníku. Ve druhém běhu se účastnilo 22 nadaných žáků 4. ročníku a 16 nadaných žáků 5. ročníku. Navštěvovat kroužek bylo umožněno i žákům, kteří nebyli diagnostikováni v PPP, a to na základě jejich zájmu. V dalším textu je budu označovat jako nediagnostikované, protože je pravděpodobné, že někteří z nich byli také nadaní, pouze nebyli identifikováni.

Počty všech zúčastněných žáků jsou uvedeny v Tabulce 1. V jednotlivých týdnech se počty žáků řešících dané úlohy mohou lišit, neboť někteří žáci byli nemocní nebo se neúčastnili kroužku v daném týdnu z jiného důvodu.

Tabulka 1. Počty žáků účastnících se matematického kroužku

	1. běh			**2. běh**		
	4. ročník	**5. ročník**	**Celkem**	**4. ročník**	**5. ročník**	**Celkem**
Nadaní	**17**	**15**	**32**	**22**	**16**	**38**
Ostatní	**14**	**9**	**23**	**21**	**21**	**42**
Celkem	**31**	**24**	**55**	**43**	**37**	**80**

Výsledky jsem zaznamenávala zvlášť pro nadané a ostatní, poté jsem ještě analyzovala výsledky matematicky nadaných žáků, neboť matematické nadání by teoreticky mělo být nejlepším předpokladem k úspěšnému řešení úloh v matematice.

Rodiče všech žáků, kteří byli zapojeni do výzkumu, podepsali informovaný souhlas s testováním dítěte a použitím jeho výsledků pro výzkumné záměry.

5. Výběr a charakteristika úloh

Úlohy, které jsem vybrala pro výzkum, byly rovnicového charakteru. Nyní uvedu jejich znění a stručnou charakteristiku:

1. *Myslím si číslo. Když je vynásobím 5 a odečtu 25, dostanu 100. Které číslo si myslím?* (Aritmetická úloha vedoucí ke dvojkrokové rovnici.)

2. *Myslím si číslo. Jestliže k němu přičtu 7, tento součet vydělím třemi a nakonec vynásobím pěti, dostanu 45. Které číslo si myslím?* (Aritmetická úloha vedoucí k trojkrokové rovnici.)
3. *Roman říká: „Aby mi bylo sto let, musel bych žít ještě devětkrát tak dlouho, než jsem doposud žil, a ještě 10 roků.“ Kolik je mu roků?* (Dynamická slovní úloha.)
4. *Mamince a tatínkovi je dohromady 80 roků. Tatínek je o 4 roky starší než maminka. Kolik roků je mamince a kolik tatínkovi?* (Slovní úloha s dělením celku na nestejné části.)
5. *Kapr váží 2 kilogramy, a ještě půl kapra. Kolik kilogramů váží celý kapr?* (Problémová úloha.)

Zajímavé výsledky z hlediska odlišený nadaných a nediagnostikovaných žáků se objevily u úloh 2 a 4. Nyní se proto na tyto dvě úlohy podrobněji zaměřím.

6. Analýza úloh a priori

Ad 2. Zadání lze přepsat do matematického zápisu $\left[\left(\_\_ + 7\right):3\right] \cdot 5 = 45$. Je možné postupovat aritmeticky. Zaměříme se na číslo 45, které je možné napsat v součinovém tvaru jako $9 \cdot 5 = 45$. V hranaté závorce je tedy číslo 9, které získáme, když 27 vydělíme třemi. Neznámé číslo tedy musí být 20. Pro žáky je dovednost vnímat čísla v součinovém či součtovém tvaru podstatná a při řešení rovnic může usnadňovat výpočty.

Další aritmetický postup je pomocí metody od konce: $45 : 5 = 9, 9 \cdot 3 = 27, 27 - 7 = 20$.

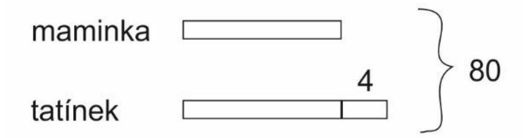
Úlohu můžeme řešit i algebraicky sestavením rovnice $[(x + 7):3] \cdot 5 = 45$. Pomocí formálních operací by se rovnice řešila ve třech krocích:

$$[(x + 7):3] = 45 : 5$$
$$(x + 7) = 9 \cdot 3$$
$$x = 27 - 7$$

Hledané číslo je 20. Prověříme správnost dosazením do zadání: $20 + 7 = 27$, $27 : 3 = 9$, $9 \cdot 5 = 45$.

Ad 4. Jedná se o dělení celku na nestejné části. V zadání je obsažen operátor porovnání, přičemž neznáme věk ani jednoho z rodičů. Tím je úloha pro žáky 1. stupně netypická a náročná. Úlohu je možné řešit tak, že 80 vydělíme dvěma. Pokud by rodiče byli stejně staří, měli by 40 let. Jestliže tatínek je o 4 roky starší než maminka, musíme mamince 2 roky ubrat a tatínkovi tyto 2 roky přidat. Mamince je tedy 38 let a tatínkovi 42.

Úlohu můžeme také řešit pomocí úsečkového modelu, ze kterého vyčteme aritmetické vztahy:



Platí: $80 - 4 = 76$, $76 : 2 = 38$, $38 + 4 = 42$. Mamince je 38 let a tatínkovi 42.

Novotná (1997) uvádí, že ze dvou výše zmíněných postupů, tj. $80 : 2 = 40, 40 - 2 = 38, 40 + 2 = 42$ a $80 - 4 = 76, 76 : 2 = 38, 38 + 4 = 42$, je druhý postup univerzálněji využitelný, lze jej zobecnit i pro dělení celku na více než dvě části. První postup je navíc rizikovější z hlediska udělání chyby, kdy žáci inklinují k nesprávnému výpočtu $80 : 2 = = 40, 40 - 4 = 36, 40 + 4 = 44$.

Algebraicky lze úlohu řešit rovnicí $x + (x + 4) = 80$, kde neznámá x je věk maminky, nebo soustavou rovnic $x + y = 80, y = x + 4$, kde x značí věk maminky a y věk tatínka.

Provedeme zkoušku slovní úlohy: $38 + 42 = 80, 42 - 4 = 38$.

U každé z uvedených úloh lze sledovat linii řešitelských strategií *experiment → aritmetické strategie → algebraické strategie*. V tomto směru jsem rovněž posuzovala sofistikovanost použitých strategií. Na matematické znalosti a dovednosti je nejméně náročná a také nejméně sofistikovaná experimentální strategie, za nejsofistikovanější lze považovat algebraické strategie (ovšem za předpokladu, že žák chápe, co provádí, a nemá jen naučenou sekvenci kroků pro určité typy úloh). Také v rámci jednotlivých kategorií se sofistikovanost řešení může lišit. Například u aritmetické metody jsem jako sofistikovanější chápala ty strategie, které více souvisejí se způsobem řešení rovnice, jako jsou šipkové diagramy, postup od konce či úsečkový diagram, nežli početní postupy, jako je třeba rozklad čísla na součin (viz úloha 2).

7. Analýza dat

Písemná řešení žáků jsem analyzovala z hlediska použitých metod řešení a chyb, kterých se žáci dopouštěli. Přitom jsem si všímala i částí řešení, které byly škrtnuty, pokud mi poskytly vhled do žákova uvažování. Žáci dostali pokyn, aby zapsali i postup řešení, nejen výsledky, a většinou tak činili.

Výsledky analýz žákovských řešení jsem dávala do souvislostí s písemnými záznamy učitelů. Jak jsem již uvedla, ne všichni učitelé respektovali pokyn, aby s žáky diskutovali o jejich metodách řešení. Z 16 zapojených učitelů komentovalo průběh řešení 7, z toho 2 učitelé podávali záznamy velmi podrobné (popsali osobnost každého žáka, jeho projevy při řešení, jak se vyrovnával s tím, že nemůže objevit řešení, na co se v průběhu řešení ptal, jak reagoval v následné diskusi), ostatních 5 učitelů poskytovalo výpovědi stručné (např. pouze zapsali, když žák položil nějakou neočekávanou otázku). Žáci se v pracovním listu vyjadřovali k náročnosti úloh a v rámci diskuse s učitelem mělo být také rozebráno, které úlohy se jim jevily náročné a proč.

U každé úlohy jsem sledovala, zda existuje statisticky významný rozdíl mezi výsledky žáků nadaných a nediagnostikovaných. Na hladině významnosti 0,05 byla testována nulová hypotéza H_0: *Úspěch v úloze X a nadání spolu nesouvisí* proti alternativní hypotéze H_1: *Úspěch v úloze X a nadání spolu souvisí* pro žáky 4. a 5. ročníku zvlášť i pro obě skupiny dohromady. Byl použit chí-kvadrát[3] testu nezávislosti. V případě, že nebyly splněny podmínky dobré aproximace, byl použit Fisherův přesný test.

Žáci u každé úlohy dokreslovali smajlíky podle toho, jak se jim úloha líbila. Oblibu úloh dle smajlíku jsem vyhodnocovala, protože ale tyto výsledky nejsou pro práci podstatné, nebudu se jimi zabývat.

8. Výsledky

Úloha 2: *Myslím si číslo. Jestliže k němu přičtu 7, tento součet vydělím třemi a nakonec vynásobím pěti, dostanu 45. Které číslo si myslím?*

Souhrnné výsledky úspěšnosti jsou uvedeny v Tabulce 2 a použité strategie v Tabulce 3.

[3] Jedná se o test významnosti, který ověřuje, zda se četnosti, které byly získány měřením v pedagogické realitě, odlišují od teoretických četností, které odpovídají dané nulové hypotéze.

Tabulka 2. Úspěšnost, úloha 2

	Počet žáků			Úspěšnost		
	Celkem	4. ročník	5. ročník	Celkem	4. ročník	5. ročník
Nadaní	36	21	15	32 (89 %)	17 (81 %)	15 (100 %)
Ostatní	37	18	19	28 (76 %)	14 (78 %)	14 (74 %)

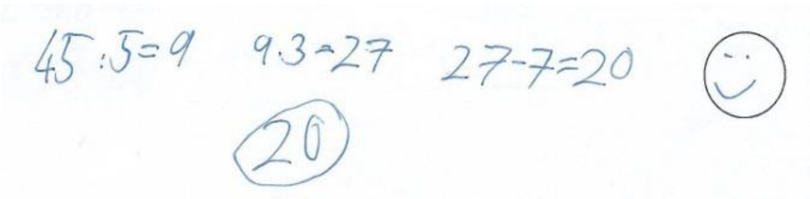
Při pohledu do Tabulky 20 je patrné, že se mírně liší výsledky nadaných a ostatních žáků. Rozdíl však není statisticky významný na hladině významnosti 0,05.[4]

Sledovala jsem ještě to, jak byli úspěšní matematicky nadaní žáci. Těch bylo 8 a všichni úlohu řešili správně. Nejčastěji postupovali od konce, v jednom případě se objevilo také algebraické řešení, a to u nadaného žáka 5. ročníku.

Tabulka 3. Různé strategie řešení, úloha 2

	Nadaní		Ostatní	
	4. ročník	5. ročník	4. ročník	5. ročník
Správně, experimentem $[(\_ + 7): 3] \cdot 5 = 45$	4	1	5	3
Správně, od konce $45: 5, 9 \cdot 3, 27 - 7$	7	12	6	8
Správně, přes x	0	1	0	0
Správně, bez popisu	6	1	3	3
Chybně	4	0	4	5

Nejčastějším postupem byl postup od konce (Obrázek 1), který lze zde vnímat jako nejsofistikovanější aritmetickou metodu. Nejčastěji ho používali nadaní žáci 5. ročníku.



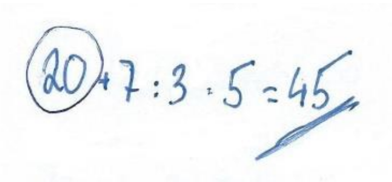
Obrázek 1. Žák postupuje od konce. Matematicky nadaný žák 4. ročníku, ZŠ

[4] Nadaní žáci 4. a 5. ročníku byli při řešení úlohy 2 úspěšní v 88,89 %, ostatní žáci v 75,68 % případů. Pearsonův chí-kvadrát = 2,176, p = 0,140. Nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.
Nadaní žáci 4. ročníku byli při řešení úlohy úspěšní v 80,95 %, ostatní žáci v 77,78 % případů. Pro testování této hypotézy používáme Fisherův přesný test, protože nejsou splněny podmínky dobré aproximace. p = 1,000. Nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.
Nadaní žáci 5. ročníku byli při řešení úlohy 2 úspěšní v 100,00 %, ostatní žáci v 73,68 % případů. Pro testování této hypotézy používáme Fisherův přesný test, protože nejsou splněny podmínky dobré aproximace. p = 0,053. Nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

ISSN 2694-8133

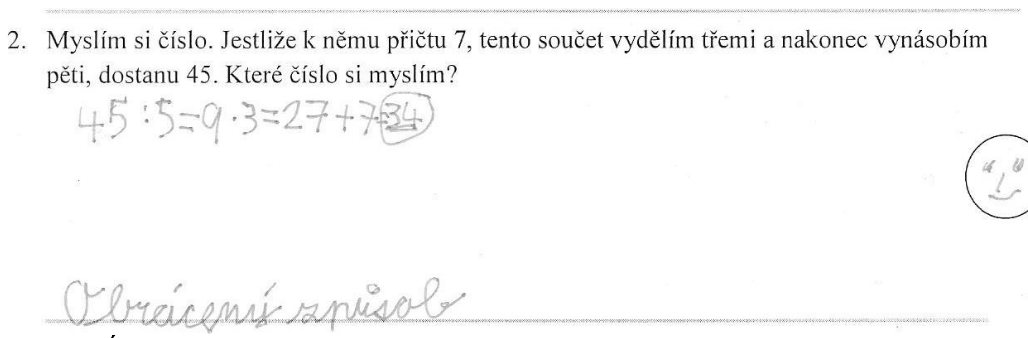
Často se také objevoval výsledek bez zapsání postupu a experimentální řešení, v němž žák hledal číslo, které bude splňovat požadované aritmetické vztahy. V tomto případě však není průkazné, jak žák vlastně postupoval. Mohlo to být metodou pokusu a omylu, kdy za neznámé číslo žák postupně dosazoval, či postupem od konce, který však nebyl zapsán. Jednotlivé možnosti se podstatně liší svojí sofistikovaností.

Na Obrázku 2 vidíme řešení experimentem – žák si nechal volnou pozici, do které doplnil číslo. Lze si všimnout, že zápis neobsahuje závorky, ale žák postupuje tak, jako by tam byly.



Obrázek 2. Žák postupuje experimentálně. Nediagnostikovaný žák 4. ročníku, ZŠ

Žáci také často používali postup od konce. V mnoha případech přitom využívali tzv. **implikační zápis**, kdy počítali zleva doprava a nerespektovali symbol rovnosti. Na Obrázku 3 je ukázka chyby, které se někteří žáci dopustili. Žák použil „obrácený způsob“, jak uvádí, aplikoval tedy inverzní operace, ale u poslední operace vyměnil odčítání za sčítání.

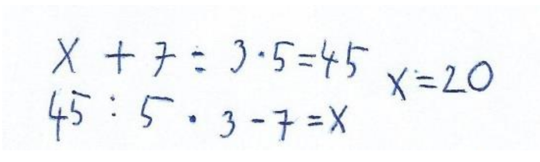

2. Myslím si číslo. Jestliže k němu přičtu 7, tento součet vydělím třemi a nakonec vynásobím pěti, dostanu 45. Které číslo si myslím?

45:5=9·3=27+7=34

Obrácený způsob

Obrázek 3. Úloha řešená od konce s chybně volenou operací, implikační zápis. Všeobecně nadaný žák 4. ročníku, ZŠ

Jeden nadaný žák 5. ročníku řešil úlohu algebraicky, pomocí rovnice. Na 0 vidíme, že provedl všechny operace v jednom kroku. Je otázkou, zda neměl pouze štěstí, když se dopracoval ke správnému výsledku. Ze zápisu například není průkazné, zda zvažoval přednost jednotlivých operací, protože zápis opět neobsahuje závorky.



Obrázek 4. Algebraické řešení úlohy s nekorektním zápisem. Všeobecně nadaný žák 5. ročníku, ZŠ, třída pro nadané

Úloha 4: *Mamince a tatínkovi je dohromady 80 roků. Tatínek je o 4 roky starší než maminka. Kolik roků je mamince a kolik tatínkovi?*

Úspěšnost úlohy 4 je uvedena v Tabulce 4.

ISSN 2694-8133

Tabulka 4. Úspěšnost, úloha 4

	Počet žáků			**Úspěšnost**		
	Celkem	**4. ročník**	**5. ročník**	**Celkem**	**4. ročník**	**5. ročník**
Nadaní	**37**	**21**	**16**	**33 (89 %)**	**17 (81 %)**	**16 (100 %)**
Ostatní	**42**	**21**	**21**	**18 (43 %)**	**9 (43 %)**	**9 (43 %)**

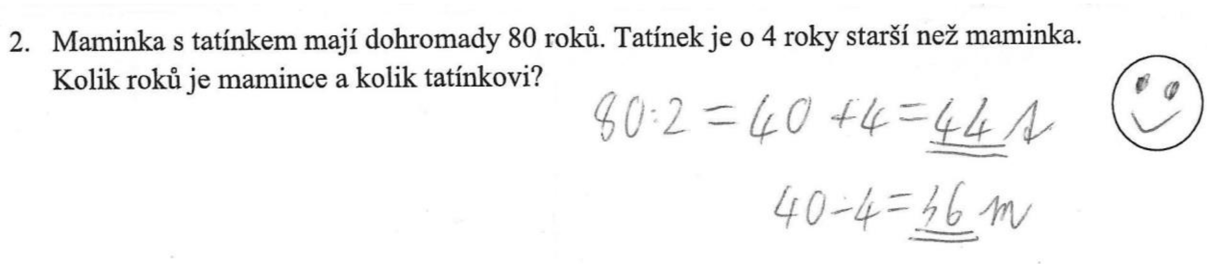
Úloha 4 byla jediná z úloh, u níž se statisticky potvrdil rozdíl mezi výsledky nadaných a ostatních žáků. Na hladině významnosti 0,05 byla zamítnuta nulová hypotéza jak pro všechny žáky dohromady (Pearsonův chí-kvadrát 6,461538, p = 0,00002), tak pro žáky 4. ročníku (Pearsonův chí-kvadrát 18,45495, p = 0,01102) a 5. ročníku (Pearsonův chí-kvadrát 13,53143, p = 0,00023). Nadaní žáci obou ročníků jsou tedy statisticky významně úspěšnější v úloze 4 než ostatní žáci.

Mezi nadanými žáky 4. i 5. ročníku bylo 8 žáků matematicky nadaných. Zkontrolovala jsem i jejich výsledky a všichni úlohu řešili správně. U těchto žáků převažovalo sofistikovanější řešení výpočtem.

V této úloze mnoho žáků neuvedlo postup řešení, a to zejména žáci 4. ročníku. Neuvedený postup může mít v podstatě tři vysvětlení:

a) žák řešil experimentálně metodou pokusu a omylu,
b) žák si výpočet zapisoval stranou a do pracovního listu napsal jen výsledek,
c) žák vyřešil úlohu zpaměti.

Mnoho nediagnostikovaných žáků (platí to zejména pro žáky 5. ročníku) uvedlo nesprávný postup, kdy 80 vydělili dvěma a pak od 40 jednou odečetli 4 a podruhé přičetli 4. Dostali pak výsledek 36 a 44, jak ukazuje Obrázek 5. Pokud žáci neprovedli zkoušku splnění podmínek slovní úlohy, nebo provedli jen zkoušku jedné z podmínek, a to $36 + 44 = 80$, nepoznali, že výsledek není správný.



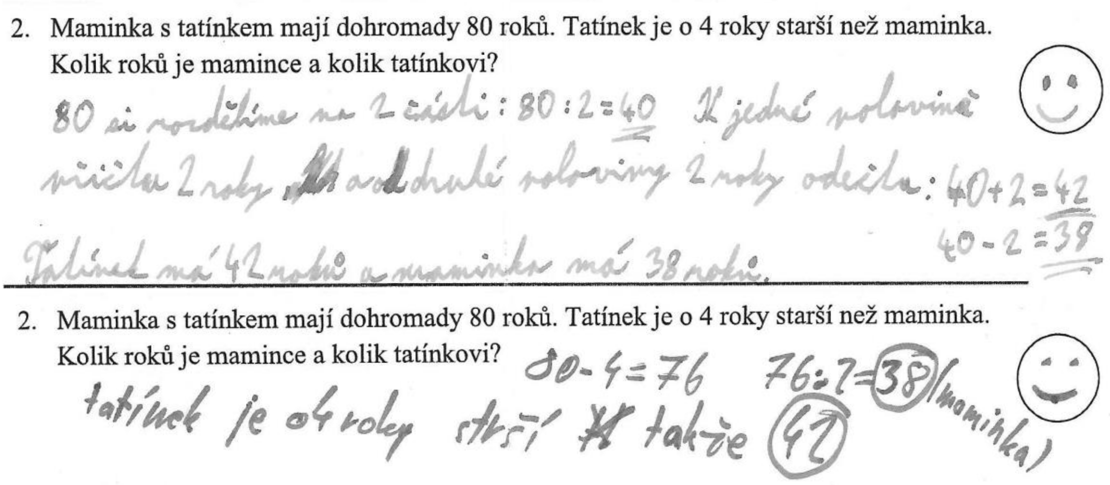
Obrázek 5. Řešení s chybou v úvaze. Nediagnostikovaný žák 5. ročníku, ZŠ, matematická třída

V případě správného řešení se objevily dvě možnosti výpočtu:

1) $80 : 2 = 40, 40 - 2 = 38, 40 + 2 = 42,$
2) $80 - 4 = 76, 76 : 2 = 38, 38 + 4 = 42.$

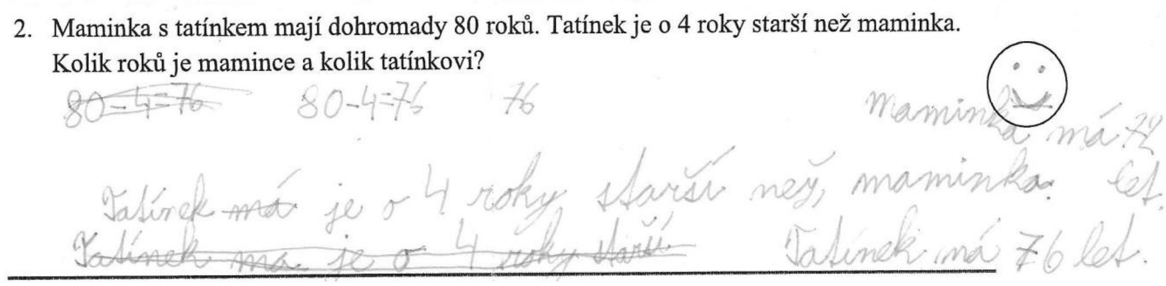
Řešení jsou ukázána na Obrázku 6.

ISSN 2694-8133



Obrázek 6. Dva způsoby správného řešení úlohy 4. Nahoře matematicky a jazykově nadaná žákyně 4. ročníku, ZŠ. Dole neidentifikovaný žák 5. ročníku, ZŠ, matematická třída

Někdy žáci zvolili zcela nesprávnou úvahu. Jeden z případů je demonstrován na Obrázku 7. Žák neprovedl zkoušku a nezkontroloval, zda je skutečně možné, aby mamince bylo 72 let a tatínkovi 76 let.



Obrázek 7. Úloha vyřešená pomocí nesprávné úvahy. Nediagnostikovaná žákyně 4. ročníku, ZŠ, matematická třída

Různé strategie řešení jsou uvedeny v Tabulce 5.

Tabulka 5. Různé strategie řešení, úloha 4

	Nadaní		**Ostatní**	
	4. ročník	**5. ročník**	**4. ročník**	**5. ročník**
Správně, výpočtem $\mathbf{80 : 2 = 40, 40 - 2, 40 + 2}$	**4**	**7**	**2**	**3**
Správně, výpočtem $\mathbf{(80 - 4) : 2 = 38}$	**2**	**4**	**1**	**4**
Správně, bez postupu	**11**	**5**	**6**	**2**
Chybně: 36 a 44	**1**	**0**	**5**	**10**
Chybně	**1**	**0**	**7**	**2**
Neřešeno	**2**	**0**	**0**	**0**

Úloha poměrně dobře odlišuje nadané děti od ostatních. Zatímco někteří nadaní v následném rozhovoru s učitelem uvedli, že úloha pro ně byla velmi jednoduchá, mnoho nediagnostikovaných dětí se v zadání ztrácelo. V tabulce můžeme zejména vidět, že mnoho těchto dětí si neuvědomilo, že když dělí dvěma součet let $(80 : 2)$, musí také vydělit dvěma rozdíl let $(4 : 2)$.

9. Diskuse a závěry

Nyní je možné odpovědět na výzkumné otázky, které jsem si položila. První výzkumná otázka zjišťovala, zda budou nadaní žáci při řešení vybraných úloh úspěšnější než ostatní žáci. Obecně nelze tvrdit, že u vybraných úloh by nadaní žáci byli při řešení úspěšnější než ostatní žáci. To může být samozřejmě dáno malým vzorkem zkoumaných žáků, ale spíše se domnívám, že tento závěr skutečně odráží realitu. Nadaní a bystří žáci se od sebe svými výkony v matematice nemusí příliš lišit. Nadaní žáci, zejména pak matematicky nadaní, častěji používají sofistikovanější metody řešení, avšak nejsou neomylní, dopouští se chyb logických i početních.

Druhá otázka se zaměřovala na jednotlivé úlohy a zjišťovala, zda mezi nimi bude taková, v níž budou nadaní žáci výrazně úspěšnější než nediagnostikovaní žáci. U některých úloh byly výsledky nadaných a ostatních žáků srovnatelné, v některých dokonce ostatní žáci dopadli lépe. Nejvíce odlišovaly nadané a ostatní žáky úlohy 2 a 4. Statisticky významný byl rozdíl pouze u úlohy 4. Úloha 2 je aritmetická úloha, vedoucí k tříkrokové rovnici. Domnívám se, že právě tři kroky vedou k tomu, že pro žáky je náročnější řešit úlohu zcela pamětně. Nejčastěji žáci využívali sofistikovanou metodu řešení od konce. Úloha 4 je slovní úloha a k úspěšnému řešení je potřebná správná aritmetická představa. Pokud tuto představu žák nemá, nepřijde na to, jaké aritmetické operace má použít. Takové chyby v úvaze se častěji dopustili nediagnostikovaní žáci. Nadaní žáci nejčastěji použili buď jednu z uvedených výpočtových metod, nebo zapsali výsledek bez postupu, což může korespondovat s pamětným řešením.

Poslední otázka se ptala, které řešitelské strategie budou nadaní žáci preferovat. Vybraná strategie závisela na typu úlohy. U jednoduchých úloh převažovalo experimentální pamětní řešení, kdy žák zkoušel dosazovat různá čísla a kontroloval uvedené vztahy. V případě úlohy 2 byl často využívaným řešením postup od konce, v případě úlohy 4 aritmetické výpočty.

V různých případech jsem se setkávala s nezvládnutou gramatikou zápisu. Jednalo se nejčastěji o používání zkrácených implikačních zápisů a nepoužívání závorek, jestliže mělo mít sčítání přednost před násobením. Zkrácený implikační zápis většinou nebývá vnímán jako závažná chyba, spíše jako pomocný zápis, ve kterém se žák vyzná. Kuřina (1989) tuto chybu označuje jako syntaktickou chybu a uvádí, že je pro žáky přirozená. „Žák úlohu postupně řeší, zapisuje dílčí výsledky a na ně navazuje dalším postupem" (Kuřina, 1989: s. 32). Tento zápis je však matematicky nesprávný, protože je porušena tranzitivita relace rovnosti. Řešiteli může zápis dávat smysl, neboť řešitel rovnítko chápe jako implikaci. Je nutné si ale uvědomit, že pokud se žák naučí vnímat symbol „=" jako jednosměrnou šipku $\Rightarrow$, může mít problémy v rovnicových zápisech, kde je neznámá na obou stranách rovnice, a nelze tedy postupovat zleva doprava.

V testování se projevilo, že žáci neumí používat závorky. Stejnou zkušenost získala Žalská (2015) ve svém výzkumu, kde se projevily problémy žáků s aktivním používáním závorek (tedy použitím závorky jako symbolu pro celistvý algebraický nebo aritmetický objekt), v menší míře i s pasivním používáním závorek (tj. interpretací závorek a jejich významu v aritmetické a algebraické syntaxi při aplikaci distributivního zákona a pořadí operací). Potíž měli žáci s pořadím operací, kdy nezřídka postupovali zleva doprava a sčítali před násobením (např. $6 + 3(2 + 1) = 9(2 + 1)$). Nevyužívání závorek žákům na 2. stupni způsobuje problémy také v algebře, když už není možné provést naznačené operace a je například nutné roznásobit závorku.

Několik nadaných žáků využívalo algebraické zápisy. Často bylo patrné, že tito žáci si umí správně označit neznámou a sestavit rovnici, problémy měli obvykle jen s gramatikou zápisu (jak bylo již uvedeno, např. nepoužívali závorky). Rogers a Novotná (2003) uvádí čtyři stupně přechodu od aritmetického k algebraickému způsobu využívání písmen v písemném záznamu zadaných informací:

1) Řešitel používá jedno písmeno k označení více neznámých, písmeno je pro něj označení jakékoli obecné neznámé.
2) Řešitel používá jedno nebo více písmen ve fázi kódování textu, ale nepracuje s nimi ve fázi transformace, neznámá je použita pouze jako označení něčeho, co se má hledat. Řešení je aritmetické.
3) Řešitel vědomě používá písmena pro označování hledaných hodnot a pro popis zadaných vztahů, avšak stále jsou pro něj důležité aritmetické modely, proto je použito aritmetické řešení.
4) Řešitel používá písmena k označení hodnot, uplatňuje algebraické operace. V tomto případě jsou splněny podmínky pro správné používání algebraických metod.

Jestliže žák 1. stupně používá písmena k řešení problému, není zcela jisté, na kterém stupni přechodu od aritmetického k algebraickému způsobu využívání písmen se nachází. Pokud se jedná o umělé urychlení poznávacího procesu (např. žák zápisu nerozumí, ale líbí se mu, že ho používá mezi vrstevníky pouze on), vzniká riziko upevnění nesprávných představ o algebraických metodách. Zejména se jedná o přednost operací a používání závorek.

Závěrem zmíním, že žáci neprováděli zkoušku správnosti svých výpočtů. Z toho důvodu mnohdy neodhalili chybu, které se dopustili. Leckdy si žáci nevšimli ani výsledku, který byl v kontextu zadání nesmyslný.

Literatura

Blažková, R. & Budínová, I. (2014). *Pracovní listy 1 - 8 pro matematicky nadané žáky 4. a 5. ročníku.* Brno: Centrum MU pro rozvoj nadaných dětí v JM kraji.

Hejný, M. a kol. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2.* Bratislava: Státní pedagogické nakladatelství.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně.* Praha: PdF UK.

Kuřina, F. (1989). *Umění vidět v matematice*. Praha: SPN.

Novotná, J. (2000). *Analýza řešení slovních úloh.* Praha: PedF UK.

Rogers, L. & Novotná, J. (2003). Word Problems: A Framework for Understanding, Analysis and Teaching. In: *Classroom Contexts. Effective Learning and Teaching of Mathematics from Primary to Secondary School* (s. 79-96). Bologna: Pitagora Editrice.

Žalská, J. (2015). Počátky algebraické činnosti: algebraizace a algebraické úpravy v řešeních žáků 2. stupně. In Vondrová, N. & Rendl, M.: *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků* (s. 319–400). Praha: Karolinum.